

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Российский биотехнологический университет (РОСБИОТЕХ)»**

На правах рукописи



Крахмалев Олег Николаевич

**МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯЦИОННЫМИ РОБОТАМИ НА ОСНОВЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Специальность 2.3.3 — Автоматизация и управление технологическими
процессами и производствами

**Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук**

Научный консультант:
д.т.н., доцент **И. Г. Благовещенский**

Москва 2023

Содержание

Введение	9
1 Методы и задачи моделирования в управлении манипуляционными роботами	31
1.1 Методы и задачи моделирования кинематики манипуляционных систем роботов	31
1.1.1 Моделирование кинематики манипуляционных систем роботов	31
1.1.1.1 Метод двух связанных систем координат	34
1.1.1.2 Матрицы преобразования однородных координат	36
1.1.1.3 Методика построения геометрических моделей	38
1.1.2 Прямая задача кинематики. Функция положения	41
1.1.2.1 Вычисление кинематических параметров	42
1.1.2.2 Матрицы дифференцирования	44
1.1.3 Методы решения обратной задачи кинематики	45
1.1.3.1 Численные методы решения обратной задачи кинематики	48
1.1.3.2 Метод сингулярного разложения матрицы Якоби	49
1.1.3.3 Метод оптимизации	50
1.2 Методы моделирования динамики манипуляционных систем роботов	52
1.2.1 Методы составления уравнений движения	52
1.2.1.1 Уравнение Лагранжа	53
1.2.1.2 Уравнение Аппеля	55
1.2.2 Инерционные модели манипуляционных систем роботов	56
1.2.2.1 Матрицы инерции	56
1.2.2.2 Методика построения инерционных моделей	58
1.2.3 Моделирование обобщённых сил	62
1.2.3.1 Элементарная работа внешних сил	62
1.2.3.2 Модель внешних сил	64
1.2.3.3 Альтернативная модель внешних сил	66

1.2.3.4	Модель консервативных сил	67
1.2.3.5	Усилия в приводах и вектор обобщённых сил	68
1.3	Динамические модели и задачи моделирования динамики манипуляционных систем роботов	69
1.3.1	Построение основной динамической модели манипуляционных систем	69
1.3.2	Альтернативная динамическая модель	72
1.3.3	Матричные коэффициенты динамических моделей	73
1.3.3.1	Матрица M	75
1.3.3.2	Матрица S	76
1.3.3.3	Матрица K	76
1.3.3.4	Матрица C_s	77
1.3.4	Задачи моделирования динамики манипуляционных систем роботов	77
1.4	Методы кинематического и динамического управления манипуляционными роботами	80
1.4.1	Кинематическое управление манипуляционными роботами	80
1.4.2	Динамическое управление манипуляционными роботами	81
1.4.3	Концепция построения модели управления манипуляционными роботами	85
1.5	Выводы	86
2	Моделирование отклонений в манипуляционных системах роботов	90
2.1	Моделирование неизменяющихся геометрических отклонений в манипуляционных системах роботов	90
2.1.1	Моделирование первичных геометрических отклонений	90
2.1.1.1	Первичные геометрические отклонения	90
2.1.1.2	Модель первичных отклонений	91
2.1.1.3	Отклонения позиционирования	93

2.1.2 Модификация геометрических моделей	94
2.1.2.1 Модифицированная модель	94
2.1.2.2 Альтернативная модель	96
2.1.3 Метод коррекции интегральных отклонений	98
2.1.3.1 Интегральные отклонения	98
2.1.3.2 Метод коррекции	100
2.2 Методы диагностирования кинематической структуры манипуляционных систем роботов	102
2.2.1 Калибровка центра инструмента	105
2.2.1.1 Прямой ввод локальных координат <i>TCP</i>	105
2.2.1.2 Калибровка базовым инструментом	106
2.2.1.3 Метод двух подходов	108
2.2.2 Калибровка ориентации инструмента	109
2.2.2.1 Метод параллельных осей	110
2.2.2.2 Метод калибровки ориентации по трём точкам	111
2.2.3 Калибровка базы	116
2.2.3.1 Прямой ввод данных	117
2.2.3.2 Метод калибровки базы по трём точкам	118
2.2.3.3 Метод калибровки базы по двум и четырём точкам	123
2.3 Моделирование изменяющихся линейных и угловых отклонений в шарнирах манипуляционных систем роботов	126
2.3.1 Моделирование линейных отклонений в шарнирах	126
2.3.1.1 Постановка задачи моделирования	126
2.3.1.2 Геометрическая модель	128
2.3.1.3 Динамическая модель	131
2.3.1.4 Анализ модели	134
2.3.1.5 Методика моделирования	136
2.3.1.6 Адекватность модели	139
2.3.2 Моделирование угловых отклонений в шарнирах	142
2.3.2.1 Постановка задачи моделирования	142

2.3.2.2	Геометрическая модель	143
2.3.2.3	Динамическая модель	149
2.3.3	Моделирование линейных и угловых отклонений в шарнирах	152
2.3.3.1	Постановка задачи	152
2.3.3.2	Динамическая модель	152
2.4	Моделирование малых отклонений позиционирования.	154
2.4.1	Уравнение движения с отклонениями позиционирования	154
2.4.1.1	Постановка задачи	154
2.4.1.2	Вывод уравнения движения	156
2.4.1.3	Свободные упругие колебания	158
2.4.2	Динамическая модель для анализа малых отклонений позиционирования	159
2.4.2.1	Декомпозиция уравнения движения	159
2.4.2.2	Динамическая модель	163
2.4.2.3	Методика моделирования	164
2.4.2.4	Оценка точности динамической модели	165
2.5	Выводы	170
3	Методология математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов	175
3.1	Концептуальные положения методологии математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов	175
3.1.1	Положения методологии математического объектного моделирования	175
3.1.1.1	Базовые понятия	175
3.1.1.2	Концептуальная схема моделирования манипуляционных систем роботов	177
3.1.2	Перспективы математического объектного моделирования	181
3.1.2.1	Объектно-ориентированный подход	181
3.1.2.2	Метод визуального программирования математических моделей	182

3.1.2.3	Метод структурных мутаций	184
3.1.3	Краткое обобщение основных положений методологии	185
3.2	Объектное моделирование кинематики манипуляционных систем роботов	186
3.2.1	Классы и объекты геометрических моделей	186
3.2.1.1	Классы Matrix, Homogeneous_matrix и Geometric_model	186
3.2.1.2	Классы специальных матриц	189
3.2.1.3	Графическое представление операций с объектами Matrix	192
3.2.1.4	Объектное представление геометрических моделей	194
3.2.2	Объектное моделирование геометрических отклонений	197
3.2.2.1	Классы модифицированных геометрических моделей	197
3.2.2.2	Класс модифицирующих объектов	200
3.2.2.3	Объектное представление модифицированных геометрических моделей	201
3.2.3	Анализ сложности вычисления матричных объектов	204
3.2.3.1	Ассоциативность и вычислительная сложность матричных операций	204
3.2.3.2	Матрицы промежуточных преобразований	206
3.2.3.3	Расширенная геометрическая модель	207
3.2.4	Объектное моделирование кинематических параметров	209
3.2.4.1	Класс векторов	209
3.2.4.2	Класс матриц дифференцирования	211
3.2.4.3	Объектные схемы вычисления кинематических параметров	212
3.2.5	Объектная схема алгоритма обратной задачи кинематики манипуляционных систем	217
3.3	Объектное моделирование динамики манипуляционных систем роботов	219
3.3.1	Классы и объекты инерционных моделей	219
3.3.1.1	Классы Inertial_matrix и Inertial_model	219

3.3.1.2	Объектное представление инерционных моделей	221
3.3.2	Объектно-ориентированное моделирование внешней нагрузки	222
3.3.2.1	Объектное представление внешних сил	222
3.3.2.2	Объектное представление сил тяжести	225
3.3.3	Классы и объекты динамических моделей	225
3.3.3.1	Классы в динамических моделях	225
3.3.3.2	Объектное представление динамических моделей	227
3.3.3.3	Объектное представление элементов матричных коэффициентов	228
3.4	Выводы	332
4	Аспекты практического применения математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов	235
4.1	Конструирование объектных схем математических моделей	235
4.1.1	Математическое моделирование	235
4.1.1.1	Процесс математического моделирования	235
4.1.1.2	Вычислительные алгоритмы и ошибки вычислений	237
4.1.1.3	Адекватность и оценка точности математического моделирования	240
4.1.2	Объектное представление математических моделей	243
4.1.2.1	Структура объектных схем	243
4.1.2.2	Визуальное конструирование объектных схем	245
4.1.2.3	Шаблоны объектных схем	247
4.1.2.4	Модификация объектных схем	248
4.1.3	Объектное представление параллельных вычислительных алгоритмов	250
4.1.3.1	Анализ структуры объектных схем	251
4.1.3.2	Алгоритм параллельных вычислений динамической модели	256
4.1.3.3	Алгоритмы параллельных вычислений матричных операций	262

4.2 Генетическое программирование в задачах моделирования манипуляционных систем роботов	273
4.2.1 Модификация математических моделей манипуляционных систем роботов методом структурных мутаций	273
4.2.1.1 Индуцированный мутагенез в структуре геометрической модели манипуляционных систем роботов	273
4.2.1.2 Модификация динамических моделей методом структурных мутаций	275
4.2.2 Генетическое программирование объектно-ориентированных математических моделей манипуляционных систем роботов	282
4.2.2.1 Генетический алгоритм	282
4.2.2.2 Решение обратной задачи кинематики на основе генетического алгоритма	285
4.2.2.3 Генетическое программирование	289
4.2.2.4 Оптимизация объектных схем методом генетического программирования	291
4.3 Выводы	293
Заключение	296
Литература	298
Приложение	313

Введение

Актуальность темы исследования

Методы и способы построения динамических моделей сложных непрерывно-детерминированных систем, до настоящего времени, ориентировались на создание эффективных последовательно выполняемых алгоритмов, реализующих формирование и решение алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Эффективность этих алгоритмов определялась, в основном, количеством совершаемых ими арифметических операций, а их программирование выполнялось с использованием языков процедурного типа, например, таких как Fortran, Pascal или C.

В настоящее время интенсивное развитие микропроцессорной техники позволяет использовать для моделирования и управления манипуляционными роботами, компактные многоядерные и даже многопроцессорные вычислительные комплексы. Такие вычислительные комплексы позволяют реализовать алгоритмы, поддерживающие параллельные вычисления.

При организации моделирования на основе параллельных вычислительных алгоритмов эффективность вычислений уже обеспечивается не только и даже не столько снижением объёма вычислений, а в большей мере степенью параллелизма вычислительных алгоритмов. Для реализации таких алгоритмов нужны уже специальные методы моделирования и способы программирования, поэтому их разработка является актуальной задачей.

Построение алгоритмов, реализующих параллельные вычисления, основывается на структурном анализе математических моделей. Применение объектно-ориентированного подхода позволяет представить структуру математических моделей в виде объектных схем, отражающих объекты, составляющие математические модели, и связи между ними. Объекты инициализируются значениями, после чего с ними могут быть выполнены определённые операции.

Построение объектных схем математических моделей может быть реализовано в графической среде, создаваемой компьютерной программой, в которой

элементам таких схем ставятся в соответствие программно реализованные (виртуальные) объекты. Использование элементов компьютерной графики при создании объектных схем позволяет реализовать визуальное конструирование математических моделей, что является актуальной задачей, так как обеспечивает автоматизацию процесса разработки моделей.

Компьютерная программа MathCad [126] предоставляет средства построения алгебраических выражений различной сложности. Данные возможности позволяют существенно автоматизировать процесс составления математических моделей на основе использования объектов, соответствующих таким математическим понятиям как скаляр, вектор и матрица. В программном комплексе MATLAB [118] реализован высокоуровневый язык программирования векторов и матриц, что позволяет описывать математические модели на уровне близком к их формально-математическому представлению.

Известные программные комплексы, используемые для моделирования механических систем, такие как «Универсальный механизм» [121], MATLAB с пакетами Robotics и Simulink, Modelica [127] и др. предоставляют инструмент для моделирования движения и управления манипуляционных систем роботов. Создаваемые ими математические модели, часто генерируемые автоматически, представляют собой системы уравнений, отдельные части которых не доступны для модификации. Объектный подход реализуется в них путём добавления (удаления) уравнений или систем уравнений модели, иногда путём добавления (удаления) слагаемых или отдельных множителей в уравнениях.

В диссертационной работе рассматривается методология моделирования кинематики и динамики манипуляционных систем роботов, методы и методики которой на основе объектно-ориентированного подхода позволяют реализовать визуальное конструирование соответствующих математических моделей из проблемно-ориентированных математических объектов, выполнять последующую модификацию этих моделей на уровне их отдельных частей, а также распараллеливать процесс вычислений. Разработка таких методов и методик определяет актуальность темы исследования.

Степень разработанности темы

Моделирование манипуляционных систем роботов выполняют при разработке новых роботов и проектировании робототехнических комплексов различного назначения, а также при разработке систем управления манипуляционными роботами.

Чаще всего манипуляционные системы роботов при моделировании рассматриваются как системы твёрдых тел, связанных друг с другом и движущихся под воздействием внешних сил. Тела ставятся в соответствие звеньям манипуляционных систем. Звенья соединяются друг с другом шарнирами и образуют, как правило, кинематические пары 5-го класса. Изучение манипуляционных систем роботов с позиций теории механизмов и машин проводится Институтом машиноведения РАН им. А.А. Благоднарова (ИМАШ РАН). Коллективом учёных этого института А.И. Корендясевым, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывесом и др. подготовлены и изданы монографии [1, 2].

Кинематические цепи манипуляционных систем могут быть как разомкнутыми (простыми), так и образовывать сложные замкнутые структуры. Сложные кинематические цепи с параллельной структурой, можно заместить эквивалентными им простыми кинематическими цепями, образующимися при условном разрезании шарниров, и добавлении к ним утрачиваемых связей и силового взаимодействия. Д.Ю. Погореловым рассмотрено использование моделей упругих шарниров вместо уравнений связей для систем с замкнутыми кинематическими цепями [3].

Для описания кинематической структуры манипуляционных систем целесообразно использовать метод графов, основанный на понятии структуры дерева. Граф манипуляционной системы состоит из точек, называемых вершинами, которым соответствуют звенья механизма, и линий, соединяющих вершины, называемых рёбрами, которые соответствуют шарнирам механизма. В монографии [4] приведены теоретические положения метода связанных графов, на основе которого разработаны алгоритмы автоматизированного формирования уравнений кинематики и динамики многозвенных механизмов.

При математическом описании манипуляционных систем роботов широко используется математический аппарат теории матриц. Применение матриц для описания в пространстве положения твёрдого тела впервые было предложено в 1953 г. Ю.Ф. Морошкиным [5], а в 1955г. Денавит (Denavit) и Хартенберг (Hartenberg) разработали единый подход к описанию геометрии манипуляционных систем на основе матриц размерности 4×4 , с помощью которых можно выполнять преобразования однородных координат [6].

При рассмотрении динамики манипуляционных систем помимо описания положения звеньев в пространстве возникает необходимость описания распределения масс внутри самих звеньев. Для этого могут быть использованы тензоры (3×3) или матрицы (4×4) инерции [7]. Вид тензора (матрицы) инерции зависит от выбора систем координат, связываемых со звеньями. Наиболее простой вид тензор (матрица) инерции имеет для однородных тел в системе координат, оси которых совпадают с главными осями тел. Поэтому при моделировании каждое звено манипуляционной системы удобно представить в виде совокупности тел простой геометрической формы, для которых определены их главные оси.

При моделировании манипуляционных систем роботов первоначально используют непрерывно-детерминированную схему построения математической модели, которая в итоге всегда приводит к системе алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. При необходимости учёта влияния случайных факторов от непрерывно-детерминированной схемы переходят к непрерывно-стохастической схеме построения математической модели, которая позволяет использовать случайные функции в системах уравнений, составляющих математическую модель. При моделировании систем управления манипуляционными роботами используют дискретно-детерминированные и дискретно-стохастические схемы построения математических моделей, которые могут быть получены из непрерывных математических моделей путём замены обыкновенных дифференциальных уравнений конечно-разностными уравнениями [8].

Конечный вид математической модели определяется кругом задач для решения которых используется данная модель. При моделировании движения ма-

нипуляционных систем роботов различают две группы задач. К одной группе относятся задачи кинематики, к другой – задачи динамики. Обе группы в свою очередь разделяются ещё на две подгруппы – это прямые и обратные задачи [7, 36].

В задачах кинематики определяется пространственное положение манипуляционной системы как функции времени. Уравнения кинематики описывают движения звеньев и характерных точек манипуляционных систем, относительно выбранных систем координат, при этом не рассматриваются усилия, вызывающие эти движения [9, 10].

Прямая задача кинематики заключается в определении положения и ориентации рабочего органа манипуляционного робота относительно абсолютной (неподвижной) системы координат по известному вектору обобщённых координат и заданным геометрическим параметрам. Вычисление линейных и угловых кинематических параметров манипуляционных систем одна из подзадач, основывающаяся на решении прямой задачи кинематики [11, 12].

Обратная задача кинематики заключается в определении обобщённых координат по заданному положению и ориентации рабочего органа в неподвижной декартовой системе координат с учётом кинематической схемы манипуляционной системы. Существует несколько методов решения обратной задачи кинематики, к числу которых относятся методы обратных преобразований, винтовой алгебры, а также геометрический метод [13, 14]. В работах [15, 16] на примере стэнфордского манипулятора рассмотрена методология решения обратной задачи кинематики манипуляционных систем роботов на основе бикватернионной теории кинематического управления. В статье [55] В.П. Глазковым и др. дана оценка точности нейросетевого решения обратной задачи кинематики манипуляционного робота.

Динамические модели манипуляционных систем могут быть построены известными методами теоретической механики. Однако необходимо учитывать, что процесс и результаты моделирования динамики манипуляционных систем существенно зависят от выбора метода построения математических моделей.

Одними из первых динамические модели для описания движения большого класса систем, состоящих из шарнирно связанных твердых тел, были предложены

Кейном (Kane) [17], Виттенбургом (Wittenburg) [18], Дж. Уикером (Uicker) [19] и Д. Уитни (Whitney) [20]. Ими были разработаны методы анализа разомкнутых кинематических цепей, которые применялись для исследования динамики манипуляционных систем.

Уравнения движения манипуляционных систем, полученные методом Лагранжа-Эйлера, впервые были опубликованы Дж. Уикером в 1967г. в работе [19] и в дальнейшем развиты в работах [21, 22], а также в работах М. Вукобратовича [23, 24]. Применение данного метода связано с составлением и последующим дифференцированием выражений для кинетической и потенциальной энергий. Ф.М. Кулаков показал [25], что для простых, незамкнутых кинематических цепей можно избежать численного дифференцирования, а Холлербах (Hollerbach) [26] предложил способ уменьшения времени вычисления обобщённых сил.

Метод Ньютона-Эйлера, основанный на одноимённых уравнениях, обладает большой вычислительной эффективностью, обусловленной векторным представлением этих уравнений. Этот метод приводит к системе прямых и обратных рекуррентных уравнений, вычисляемых для каждого звена манипуляционной системы. С помощью прямых уравнений последовательно от основания к рабочему органу вычисляются кинематические параметры движения звеньев, такие как линейные и угловые скорости и ускорения. Обратные уравнения позволяют вычислять последовательно от рабочего органа к основанию силы и моменты, действующие на каждое из звеньев [27].

Кроме методов Лагранжа-Эйлера и Ньютона-Эйлера для построения математических моделей манипуляционных систем с целью исследования динамики также могут быть использованы другие методы, такие как методы Д'Аламбера [28–31], Гаусса [29, 32, 33], Аппеля [34] и связных графов [4]. На основе построенных математических моделей решают прямую и обратную задачи динамики манипуляционных систем.

Прямая задача динамики манипуляционных систем состоит в том, чтобы по заданным силам и моментам определить обобщённые координаты, их скорости и ускорения [35, 36].

Обратная задача динамики заключается в том, чтобы по заданным обобщённым координатам, их скоростям и ускорениям, определить действующие на звенья манипуляционной системы силы и моменты [37–41].

В методике моделирования динамики манипуляционных роботов основывающейся на методе малого параметра, разработанной в ИПМех РАН (Москва) Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотником и В.Г. Градецким [42], задачи динамики сформулированы с позиций теории управляемых систем. Так, прямая задача динамики формулируется как задача динамического управления, в которой требуется определить движение системы в соответствии с заданным законом изменения управляющих сил. Обратная задача формулируется как задача кинематического управления, в которой предполагается точное выполнение приводом заданного кинематического закона движения, независимо от нагрузки.

В работах Е.П. Попова, А.Ф. Верещагина, С.Л. Зенкевича [35], М. Вукобратовича [23, 24], А.В. Тимофеева [44, 45], П.Д. Крутько [39, 40], Е.И. Юревича [46, 101], Ю.В. Подураева [47, 74] изложены вопросы кинематики, динамики и управления, а также предложены методики исследования динамических моделей манипуляционных систем промышленных роботов, в том числе с помощью моделирования на ЭВМ.

Большое число алгоритмов управления промышленными (манипуляционными) роботами было разработано М.Б. Игнатьевым, Ф.М. Кулаковым, А.М. Покровским [43]. В.М. Лохиным, С.В. Манько и М.П. Романовым развита технология применения аппарата теории автоматов для управления многоагентными робототехническими системами [56].

Методы робастного, нейро-нечёткого и адаптивного управления исследовали К.А. Пупков, Б.Т. Поляк, А.С. Ющенко [48–50]. Коллаборативные человеко-машинные интерфейсы рассмотрены в работах А.С. Ющенко [50, 51], Ю.В. Подураева [71], К. Отта (Ott) [52, 53] и др. [54].

Изучение конструкций реабилитационных экзоскелетов проводили В.Е. Павловский, С.Ф. Яцун и др. [62–69]. Исследования, связанные с применением

манипуляционных роботов в медицине, проводили А.А. Воротников, Ю.В. Подураев и др. [70–73].

Для формирования методического аппарата оценки функциональной эффективности робототехнических комплексов И.Л. Ермоловым и С.П. Хрипуновым предложена структурно-функциональная схема, имеющая обобщенный характер, которая может быть использована для описания широкого круга роботов [57]. Д.Д. Климовым и Ю.В. Подураевым разработана структура робототехнического комплекса высокоскоростной съемки динамических объектов [75, 76].

Из числа иностранной литературы по теоретическим основам робототехники и структурному анализу механизмов манипуляционных систем роботов можно отметить издания [7, 36, 104–114].

В последнее время всё больше работ связано с моделированием орбитальных робототехнических систем, предназначенных для работы в ближнем космосе в условиях невесомости. В ЦНИИ РТК (Санкт-Петербург) [102] работа по проектированию робота для космической орбитальной станции выполняется коллективом молодых исследователей под руководством И.Ю. Даляева [58, 103]. По этой тематике работы ведутся и в европейских исследовательских центрах [59–61].

В работах О.В. Дружининой, О.Н. Масиной и А.А. Петрова дан анализ устойчивости и рассмотрены условия оптимальной стабилизации движения манипуляционных систем. Представлена обобщенная динамическая модель и разработан алгоритм с использованием искусственных нейронных сетей, позволяющий находить оптимальные параметры движения в случае, когда аналитическое исследование модели затруднено [77–80].

Решения задач глобальной оптимизации при автоматизированном проектировании и оптимальном управлении динамическими системами, построенные на основе популяционных алгоритмов (П-алгоритмов), рассмотрены в работах А.П. Карпенко [96–100].

Теоретические основы анализа и моделирования сложных систем были разработаны член.-корр. АН СССР Н.П. Бусленко [81]. В работе Н. Бурбаки [82] были сформулированы понятия о родах структур математических моделей. В рабо-

тах Ю.Н. Павловского [83–86] рассмотрены различные аспекты декомпозиции структур математических моделей в некоторых приложениях математического моделирования.

На начальном этапе создания средств имитационного моделирования использовались классические языки программирования, сначала процедурного типа, например, Алгол (Algol), Фортран (Fortran), Паскаль (Pascal), Си (C), и др., а затем объектно-ориентированные, такие как Си++ (C++), Си# (C#), Джава (Java) и др. [116, 122]. В настоящее время для создания и тестирования имитационных моделей все чаще используются средства и языки, специально предназначенные для моделирования.

В работах Ю.И. Бродского на основе понятия родов структур рассмотрены задачи синтеза имитационных моделей сложных систем и сформулирована концепция модельно-ориентированного программирования, на основе которой разработан язык описания комплексов и компонент ЯОКК [87–95].

В монографии [87] дан краткий обзор компьютерных средств имитационного моделирования сложных систем: MASON (Multi-Agent Simulator of Neighborhoods) – разработка Университета Джорджа Мейсона (Вирджиния, США), GPSS (General Purpose Simulation System) – система имитационного моделирования общего назначения, SeSAm (Shell for Simulated Agent Systems) – визуальная система мультиагентного моделирования с UML (Universal Modeling Language) -подобным интерфейсом и др.

UML представляет собой графический язык для моделирования компьютерных программ. Язык разработали в конце 90-х годов Г. Буч (Butch), Д. Рэмбо (Rambo) и И. Джекобсон (Jakobson). Популярное описание данного языка представлено в книге Р. Лафоре [117].

Одной из первых реализаций объектно-ориентированного подхода в моделировании динамических систем можно считать язык Даймола (Dymola), разработанный Х. Эльмквистом (H. Elmqvist) [128 – 132]. Идеи объектного моделирования, реализованные в данном языке, получили дальнейшее развитие в языке Modelica [119], для поддержки которого в 2000 году было основано некоммерче-

ское объединение Modelica Association [127, 133 – 135], занимающееся стандартизацией и дальнейшим развитием этого языка.

Среди инструментальных средств компьютерного моделирования, получивших широкое распространение и позволяющих моделировать манипуляционные системы роботов и системы управления их движением, можно выделить такие программные комплексы как MATLAB [118], с реализованными в нем пакетами (Toolbox) Robotics и Simulink, а также SimInTech [120], «Универсальный механизм» [121] и др.

В книге Г. Кли (Klee) и Р. Аллена (Allen) [115] наглядно представлено моделирование непрерывно-детерминированных и стохастических систем с использованием MATLAB Simulink.

В монографии Ю.Б. Колесова [137] рассмотрены существующие подходы к решению проблемы объектно-ориентированного моделирования сложных динамических систем на примерах моделей технических систем, реализованных с использованием пакета программ Model Vision. В работах [138 – 141] рассмотрено объектно-ориентированное моделирование в среде Rand Model Designer, использующей объектно-ориентированный язык моделирования Model Vision Language, соответствующий UML-«стандарту».

В статье И.И. Косенко [123] рассмотрены примеры моделирования механических систем в программной среде языка Modelica. Моделированию дискретно-непрерывных технических систем с использованием этого языка посвящены работы [130 и 136].

В статьях [124, 125] рассмотрены примеры моделирования движения промышленных роботов в программном комплексе «Универсальный механизм».

Представленный обзор позволяет определить положение выполненных по теме диссертации прикладных исследований в ряду исследований, выполненных другими авторами в области моделирования сложных механических систем и манипуляционных систем роботов, в частности. Из обзора видно, что данная тема исследований находится на стыке таких научных областей как механика систем тел, теория механизмов и машин, с одной стороны, моделирование сложных си-

стем, математическое моделирование с другой стороны и информационные технологии, алгоритмизация и языки программирования с третьей стороны.

В каждой из обозначенных областей имеется высокая степень разработанности вопросов относящихся к теме исследований. Однако разработка темы диссертации потребовала конвергенции методов, соответствующих этим различным областям знаний. Направленность и классификация научно-исследовательской работы, в том числе выполняемой на стыке нескольких научных областей, определяется в первую очередь ее целью и задачами.

Цели и задачи работы

Цель диссертации состоит в разработке теоретических основ и методов построения АСУТП для управления манипуляционными промышленными роботами на основе математического моделирования, позволяющих учитывать и анализировать влияние разного рода отклонений и возмущений и основывающихся на единой методологии и объектно-ориентированном подходе, раскрывающих возможности параллельных вычислений и синтеза модели управления, выполняемого путём её реконфигурации, с использованием процедур самодиагностики и оптимизации, построенной на основе генетического программирования.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Выработать единый подход – методологию моделирования манипуляционных систем роботов и на её основе рассмотреть постановку и решение задач управления манипуляционными роботами.

2. Разработать математические модели, позволяющие учитывать разного рода отклонения в конструкциях манипуляционных систем роботов, методы коррекции таких отклонений и методы оценки точности получаемых решений.

3. На основе выработанной методологии и объектно-ориентированного подхода разработать формализм объектного описания математических моделей манипуляционных систем роботов и их представления в виде объектных схем.

4. Разработать методы самодиагностики кинематических структур манипуляционных систем роботов.

5. Раскрыть возможности и преимущества объектного моделирования при составлении и модификации математических моделей манипуляционных систем роботов, разработке алгоритмов параллельных вычислений и синтезе оптимальных структур, выполняемом на основе генетического алгоритма.

6. Составить алгоритмы и программы для систем управления манипуляционными роботами на основе разработанных математических моделей и методов моделирования.

Методология и методы исследования

Проведенные исследования основывались на теории моделирования сложных систем, теории множеств, теории матриц, теоретической механике систем тел, теории механизмов и машин, методах декомпозиции математических моделей, численных методах и методах параллельных вычислений, а также методах объектно-ориентированного программирования.

Объектами исследования являлись математические модели манипуляционных систем роботов, которые рассматривались как многозвенные механические системы, звенья которых моделировались твёрдыми телами, соединёнными между собой шарнирами. Математические модели манипуляционных систем составлялись на основе непрерывно детерминированного подхода, определяющего форму математических моделей в виде систем алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Описание кинематики манипуляционных систем строилось на использовании матриц преобразования однородных координат. Вывод уравнений движения манипуляционных систем основывался на методе Лагранжа-Эйлера. При этом использовалось выражение для полной кинетической энергии манипуляционной системы, в структуре которой были выделены матрицы инерции звеньев.

При разработке методов моделирования манипуляционных систем роботов, автор придерживался концепции моделирования сложных систем предложенной Н.П. Бусленко [81]. Применение методов декомпозиции математических моделей основывалось на понятии о родах структур математических моделей сформулиро-

ванном Н. Бурбаки [82] и приложениях геометрической теории декомпозиции математических моделей, развитых Ю.Н. Павловским [83, 85].

При проведении численных исследований применялся разработанный автором пакет прикладных программ и программные комплексы «Универсальный механизм» [121] и MATLAB Simulink с пакетом Robotics [118].

Использованные в работе понятия «класс» и «объект» соответствуют одноимённым понятиям из области объектно-ориентированного программирования, реализованным во многих языках программирования высокого уровня.

Научная новизна работы

Научная новизна заключается в разработке научных основ и формализованных методов математического моделирования функциональных задач управления манипуляционными роботами, составляющими автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП). Наиболее значимые результаты исследований представлены следующими положениями:

– представлена методология математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов, позволяющая путём выделения базовых классов в структуре данных и алгоритмов создавать на их основе сложные математические объекты и составлять из этих объектов математические модели манипуляционных систем роботов, выполнять параллельные вычисления отдельных частей математических моделей, а также при автоматизации составления математических моделей реализовать возможность их визуального программирования. Математическое объектное моделирование открывает возможности изменения математических моделей путём модификации объектных схем, соответствующих этим математическим моделям. Это позволяет создавать универсальные системы управления для манипуляционных роботов различных моделей, а также роботов, конструкция которых может собираться из различных модулей, в зависимости от выполнения той или иной технологической операции;

– предложен научно обоснованный подход к адаптации систем управления манипуляционными роботами, построенных на основе объектного описания их математических моделей, путём декомпозиции соответствующих математическим

моделям объектных схем в результате применения генетического алгоритма. Описан метод структурных мутаций, позволяющий распространить возможности генетического алгоритма на задачи модификации объектных схем, соответствующих математическим моделям манипуляционных систем роботов. Метод позволяет проводить модификации объектных схем математических моделей путём замены выбранных частей схемы на альтернативные им объекты. Использование генетического алгоритма для поиска оптимальных структур составляет основу концепции генетического программирования. Предложенный подход к адаптации позволяет создавать реконфигурируемые системы управления, в которых учитываются и анализируются влияния не только разного рода отклонений и возмущений, но и структурные изменения в управляемой системе. В частности, этот подход открывает перспективы управления роботами-трансформерами и антропоморфными роботами со стохастически изменяющимися структурами;

– разработаны методы диагностики кинематических структур манипуляционных систем роботов, включающие методы калибровки по положению характерной точки их конечного звена и по ориентации этого звена, а также методы калибровки базы, содержащей описание рабочего пространства манипуляционных систем. Методы позволяют реализовать функции самодиагностики в системах управления манипуляционными роботами и на их основе осуществлять коррекцию возникающих в кинематических структурах роботов геометрических отклонений и реконфигурацию систем управления, в случае возникновения существенных изменений в их кинематических структурах;

– разработан метод параметризации номинальных геометрических моделей манипуляционных систем роботов, представляющих собой математические модели, описывающие кинематические структуры манипуляционных систем, соответствующие их конструкторской документации, на основе первичных геометрических отклонений звеньев, вызванных неточностью изготовления и сборки деталей и узлов, составляющих звенья, а также отклонений позиционирования звеньев, возникающих в шарнирах. Метод отличается тем, что параметризация номинальных геометрических моделей манипуляционных систем роботов производится

путём воздействия на них специальным модификатором, учитывающим такие геометрические отклонения;

– разработан численный метод коррекции интегральных отклонений движения манипуляционных систем роботов, учитывающий отклонения размеров и формы звеньев (первичные геометрические отклонения), а также отклонения позиционирования звеньев, вызванные, в том числе, упругой податливостью шарниров. Метод позволяет на основе движения, заданного для номинальной модели робота, соответствующей данным конструкторской документации (3D-модели), получить скорректированное движение конкретного образца с учётом его первичных геометрических отклонений, определяемых современными методами измерений;

– разработан метод моделирования манипуляционных систем с упругими шарнирами при малых деформациях, возникающих в направлении изменения основных обобщённых координат, отвечающих за программные движения манипуляционных роботов. Метод позволяет разделять вычисления медленно изменяющихся квазистатических упругих отклонений и высокочастотных упругих колебаний;

– разработаны методы моделирования линейных и угловых отклонений в динамике манипуляционных систем роботов, в кинематической структуре которых могут быть использованы шарниры с различной степенью подвижности, позволяющие определять как упругие, так и не упругие отклонения и проводить оценку точности выполняемого движения. На основе использования данных методов может быть получен прогноз, позволяющий адаптировать управление роботом путём выбора соответствующего диапазона регулирования управляемых координат;

– разработан алгоритм на основе параллельных вычислений динамической модели манипуляционных систем роботов, с использованием матричных алгоритмов, в котором распараллеливание вычислений выполняется на нескольких уровнях, получаемых путём декомпозиции исходной динамической модели.

Теоретическая значимость исследований состоит в разработке теоретических положений, отражающих современный уровень развития АСУТП, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в области моделирования робототехнических систем как объектов управления, и расширяющих возможности АСУТП, существующих в настоящее время.

Практическая значимость заключается в следующем:

1. Система управления манипуляционными роботами, реализуемая на основе объектных схем их математических моделей, позволит создавать универсальные системы управления манипуляционными роботами различных моделей, а также роботами, конструкция которых может собираться из различных модулей, в зависимости от выполнения той или иной технологической операции.

2. Заложены принципы разработки перспективной системы управления, которая позволит выполнять адаптацию к существенно изменяющимся внешним условиям путём учёта не только возмущающих факторов, но и путём изменения структуры самой управляемой модели. При этом структурная адаптация будет осуществлять предварительную грубую настройку к изменившимся условиям, а последующая параметрическая адаптация - выполнять окончательную тонкую настройку. Такая система управления позволит обеспечить управление роботами-трансформерами, в которых изменение кинематической структуры может выполняться не только на основе заранее подготовленных вариантов, но и случайным образом. При этом должны быть выполнены процедуры самодиагностики и калибровки. Это позволит получить необходимые данные о новой структуре робота и с учётом этих данных модифицировать управляемую модель.

3. Разработанные в диссертации объектно-ориентированные методы моделирования могут обеспечить решение задачи синтеза оптимальных структур манипуляционных систем роботов на основе использования генетического алгоритма, представляющего собой стохастический метод оптимизации, реализованный по аналогии с эволюционными процессами, протекающими в природе. В генетическом алгоритме, виртуально реализующем эволюционный процесс, изменения, происходящие в сотне поколений, протекают за доли секунд. Использование ге-

нетического алгоритма в адаптивной системе управления позволит определять кинематическую структуру манипуляционной системы робота, наиболее подходящую для выполнения конкретной задачи.

4. Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать кинематику и динамику манипуляционных роботов и решать на основе получаемых моделей различные прикладные задачи, например, определять разного рода отклонения и проводить оценку точности выполняемых движений.

5. Составлены динамические модели некоторых промышленных роботов. На основе этих моделей могут создаваться модели робототехнических комплексов, разрабатываться системы автоматического управления движением роботов и их совместным взаимодействием.

6. Разработанные модели и методы могут быть использованы в организации образовательных процессов при подготовке бакалавров и магистров по профильным направлениям, таким как, например, «Автоматизация технологических процессов и производств», «Управление в технических системах» и «Мехатроника и робототехника».

На защиту выносятся теоретические и методологические положения математического моделирования функциональных задач управления манипуляционными роботами, составляющими автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП).

1. Методология математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов, позволяющая – путём выделения базовых классов в структуре данных и алгоритмов – создавать на их основе сложные математические объекты и составлять из этих объектов математические модели манипуляционных систем роботов, выполнять параллельные вычисления отдельных частей математических моделей, а также при автоматизации составления математических моделей реализовать возможность их визуального программирования. Математическое объектное моделирование открывает возможности изменения математических моделей путём модификации объектных схем, соответствующих этим математическим моделям.

2. Научно обоснованный подход к адаптации систем управления манипуляционными роботами, построенных на основе объектного описания их математических моделей, путём декомпозиции соответствующих математическим моделям объектных схем в результате применения генетического алгоритма, и метод структурных мутаций, позволяющий распространить возможности генетического алгоритма на задачи модификации объектных схем, соответствующих математическим моделям манипуляционных систем роботов. Использование генетического алгоритма для поиска оптимальных структур составляет основу концепции генетического программирования.

3. Методы диагностики кинематических структур манипуляционных систем роботов, включающие методы калибровки по положению характерной точки их конечного звена и по ориентации этого звена, а также методы калибровки базы, содержащей описание рабочего пространства манипуляционных систем, реализующие функции самодиагностики в системах управления манипуляционными роботами, позволяющими осуществлять коррекцию возникающих в кинематических структурах роботов геометрических отклонений и реконфигурацию систем управления, в случае возникновения существенных изменений в их кинематических структурах.

4. Метод параметризации номинальных геометрических моделей манипуляционных систем роботов, представляющих собой математические модели, описывающие кинематические структуры манипуляционных систем, соответствующие их конструкторской документации, на основе первичных геометрических отклонений звеньев, вызванных неточностью изготовления и сборки деталей и узлов, составляющих звенья, а также отклонений позиционирования звеньев, возникающих в шарнирах. Метод отличается тем, что параметризация номинальных геометрических моделей манипуляционных систем роботов производится путём воздействия на них специальным модификатором, учитывающим такие геометрические отклонения.

5. Численный метод коррекции интегральных отклонений движения манипуляционных систем роботов, учитывающий отклонения размеров и формы зве-

ньев (первичные геометрические отклонения), а также отклонения позиционирования звеньев, вызванные, в том числе, упругой податливостью шарниров. Метод позволяет на основе движения, заданного для номинальной модели робота, соответствующей данным конструкторской документации (3D-модели), получить скорректированное движение конкретного образца с учётом его первичных геометрических отклонений, определяемых современными методами измерений.

6. Метод моделирования манипуляционных систем с упругими шарнирами при малых деформациях, возникающих в направлении изменения основных обобщённых координат, отвечающих за программные движения манипуляционных роботов, позволяющий разделять вычисления медленно изменяющихся квазистатических упругих отклонений и высокочастотных упругих колебаний.

7. Методы моделирования линейных и угловых отклонений в динамике манипуляционных систем роботов, в кинематической структуре которых могут быть использованы шарниры с различной степенью подвижности, позволяющие определять как упругие, так и не упругие отклонения и проводить оценку точности выполняемого движения. На основе использования данных методов может быть получен прогноз, позволяющий адаптировать управление роботом путём выбора соответствующего диапазона регулирования управляемых координат.

8. Алгоритм выполнения параллельных вычислений динамической модели манипуляционных систем роботов, с использованием матричных алгоритмов, в котором распараллеливание вычислений выполняется на нескольких уровнях, получаемых путём декомпозиции исходной динамической модели.

Степень достоверности результатов

Достоверность полученных в работе результатов обуславливается использованием для их получения положений теоретической механики, теории машин и механизмов, фундаментальных принципов математического моделирования и строгостью математической постановки задач, и подтверждается сопоставлением аналитических результатов с результатами моделирования на многочисленных тестовых примерах, а также с результатами, полученными на основе методов, разработанных другими авторами. Также достоверность подтверждается публи-

кациями в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Апробация результатов

Материалы работы докладывались и обсуждались на семинарах «Теория управления и динамика систем» Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН под руководством академика РАН Ф.Л. Черноушко, при участии чл.-корр. РАН Н.Н. Болотника, профессора В.Г. Градецкого (г. Москва, июнь 2011, октябрь 2013); на семинаре лаборатории машин-автоматов Института машиноведения РАН им. А.А. Благонравова под руководством профессора Б.И. Павлова, при участии Н.А. Серкова, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывеса (г. Москва, март 2013); на семинаре кафедры теоретической механики и мехатроники Юго-Западного государственного университета под руководством профессора С.Ф. Яцуна (г. Курск, март 2011); на семинарах лаборатории прикладной механики Брянского государственного технического университета (БГТУ) под руководством профессора Д.Ю. Погорелова (г. Брянск, февраль 2011, январь 2013, февраль 2014), на заседаниях кафедры «Динамика и прочность машин» (БГТУ) под руководством профессора Б.Г. Кеглина; на заседаниях кафедры «Автоматизированные технологические системы» (БГТУ) под руководством профессора Д.И. Петрешина; на областном семинаре-практикуме «Развитие техносферы образовательного учреждения. Применение основ робототехники в учебном процессе» (г. Брянск, 23 октября 2014); на заседании кафедры робототехники и мехатроники МГТУ «СТАНКИН» под руководством профессора Ю.В. Подураева (г. Москва, май 2017); на заседании кафедры РК6 САПР МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством профессора А.П. Карпенко (г. Москва, октябрь 2018);

на конференциях:

– IV Международной научно-практической конференции «Инновации, качество и сервис в технике и технологиях», 4–5 июня 2014, ЮЗГУ, г. Курск;

- VI Всероссийской молодёжной научно-технической конференции «Актуальные проблемы техники и технологии», 18 апреля 2014, ТИ ФГБОУ ВПО «Государственный–УНПК», г. Орёл;
- Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы развития науки», 14 февраля 2014, БашГУ, г. Уфа;
- VII Международной научно-технической конференции «Проблемы обеспечения и повышения качества и конкурентоспособности изделий машиностроения и авиадвигателестроения», 21–23 сентября 2015, г. Брянск;
- Всероссийской научно-практической конференции «Инновационное развитие подъёмно-транспортной техники», 28–30 сентября 2015, г. Брянск;
- III международной заочной научно-практической конференции «Автоматизированное проектирование в машиностроении», 11 ноября 2015, г. Новокузнецк;
- IX Международной научно-практической конференции «Современные проблемы машиностроения», 1–4 декабря 2015., г. Томск.
- VIII Всероссийской научно-технической конференции с международным участием «Робототехника и искусственный интеллект», 25 ноября 2016, г. Железнодорожск;
- Региональной научно-технической конференции молодых ученых «Мехатроника и робототехника» МиР-2017, 19 апреля 2017, г. Орел;
- IV Международной школы-конференции молодых ученых "Нелинейная динамика машин" SCHOOL-NDM 2017, 18–21 апреля 2017, ИМАШ РАН им. А.А. Благоданова, г. Москва;
- Всероссийской научно-методической конференции «Проектирование машин, роботов и мехатронных систем», 19–20 октября 2017, ОГУ им. И.С. Тургенева, г. Орел;
- XIII Международной конференции по электромеханике и робототехнике «Завалишинские чтения 2018», ГУАП, 18–21 апреля 2018, г. Санкт-Петербург;

– 29-я Международная научно-техническая конференция «Экстремальная робототехника и конверсионные тенденции», ГНЦ РФ ЦНИИ РТК, 7–8 июня 2018, г. Санкт-Петербург.

– XIV Международной конференции по электромеханике и робототехнике «Завалишинские чтения 2019», 17–20 апреля 2019, ЮЗГУ, г. Курск.

Личный вклад автора

В диссертацию включены положения и результаты, полученные либо лично автором, либо при его определяющем участии. Личный вклад автора состоит в построении предлагаемых моделей, формулировке и реализации численных методов и алгоритмов решения задач, разработке комплексов программ, анализе и интерпретации полученных результатов математического моделирования.

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликовано более 60 печатных работ, в том числе учебное пособие, 4 монографии, 12 статей, индексируемых в Scopus и WoS, 16 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК по специальности 2.3.3, зарегистрировано 3 электронных ресурса и 2 компьютерные программы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двенадцати разделов, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 323 страницы текста с иллюстрациями и таблицами. Список литературы содержит 148 наименований.

1 Методы и задачи моделирования в управлении манипуляционными роботами

1.1 Методы и задачи моделирования кинематики манипуляционных систем роботов

1.1.1 Моделирование кинематики манипуляционных систем роботов

Автоматизация производственных процессов в различных отраслях промышленности непосредственно связана с применением роботов. Роботы обеспечивают возможность быстро перестраивать производство с выполнения одних технологических операций на другие, тем самым позволяя своевременно вносить изменения в выпускаемую продукцию. Основная функция манипуляционных роботов – это выполнение транспортных операций по перемещению различных объектов в пространстве, это могут быть детали (заготовки), рабочий инструмент и т.п.

Механическая часть робота, обеспечивающая его функцию, связанную с перемещением объектов в пространстве, имеет необходимое для этого число степеней подвижности и называется манипуляционной системой. Таким образом, исследование роботов как сложных механизмов, совершающих заданные (программные) движения в пространстве, сводится к изучению движения их манипуляционных систем (рис. 1.1).

Термин манипуляционная система робота относится к области теории механизмов и машин и объединяет исполнительные механизмы робота, включающие в себя манипулятор, приводы и передаточные механизмы. Манипуляционную систему в терминах и понятиях теоретической механики можно рассматривать как систему тел.

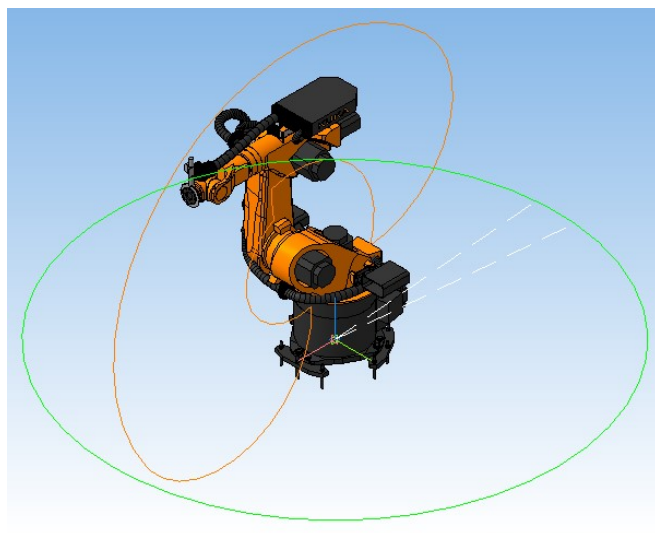
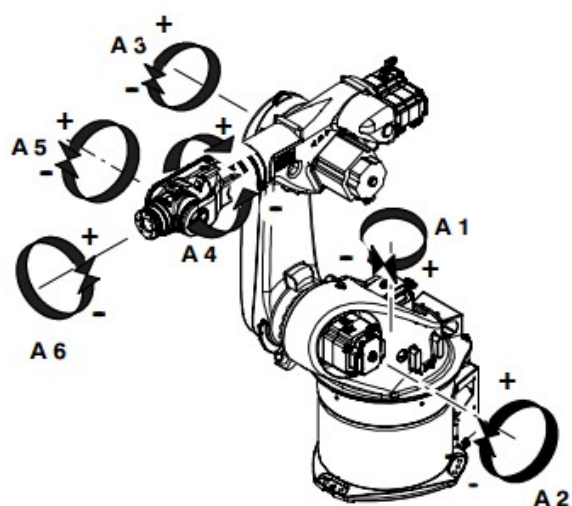


Рис. 1.1. Манипуляционная система робота (A1–A6 – степени подвижности робота)

Манипуляционные системы роботов представляют собой многозвенные механизмы, имеющие последовательную разомкнутую кинематическую структуру. Для описания структур манипуляционных систем используют метод графов. Граф состоит из вершин (точек), которым соответствуют звенья механизма, и рёбер (линий) соединяющих вершины, которым соответствуют шарниры, соединяющие между собой звенья в механизме. Манипуляционным системам соответствуют древовидные структуры графов (рис. 1.2).

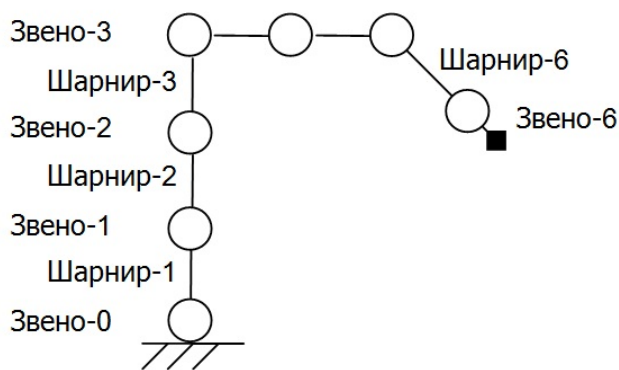
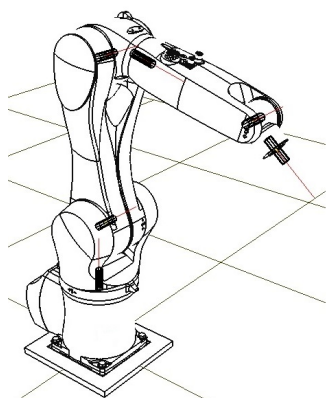


Рис. 1.2. Манипуляционная система робота и её граф

Для определения рабочего пространства робота и проведения кинематического анализа используют кинематическую схему манипуляционной системы робота. Шарниры в манипуляционных системах, как правило, имеют одну степень свободы, поэтому кинематические схемы манипуляционных систем изображаются кинематическими парами 5-го класса (рис. 1.3).

Кинематическая пара – это подвижное соединение двух звеньев, накладывающее определённые связи, ограничивающие степени свободы относительных перемещений этих звеньев. Терминологические выражения «степени свободы» и «степени подвижности» являются эквивалентными.

Количество ограниченных кинематической парой степеней свободы определяет класс кинематической пары. Поскольку свободное тело имеет в пространстве шесть степеней свободы, то кинематической паре 5-го класса соответствует одна степень свободы относительных перемещений соединяемых ею звеньев.

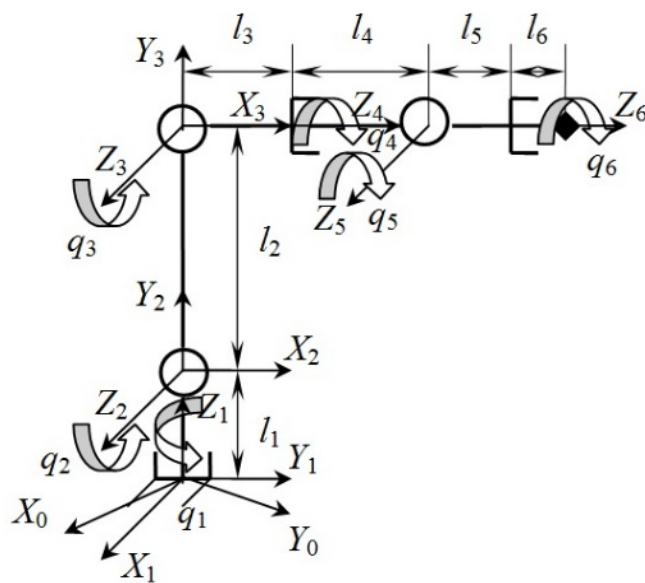


Рис. 1.3. Кинематическая схема шестизвенной манипуляционной системы

Кинематические пары, используемые в кинематических схемах манипуляционных систем, имеют несколько видов и могут быть классифицированы, например, так, как показано на рис. 1.4.

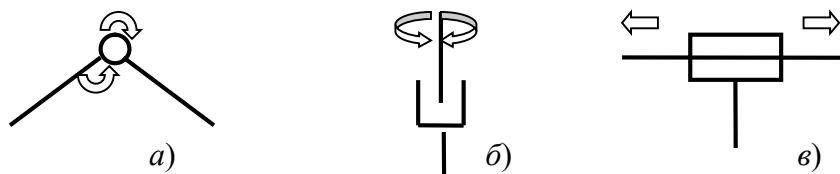


Рис. 1.4. Виды кинематических пар:
а и б – вращательные, в – поступательная

Кинематическая схема содержит всю необходимую информацию для вычисления кинематических параметров представляемого ею механизма. Так, на схеме (рис. 1.3) представлены длины звеньев l_i и значения шарнирных координат q_i , $i=(1-5)$, полностью определяющих положение манипуляционной системы в пространстве. При изменении значений шарнирных координат, отражающих относительное положение звеньев в соответствующей кинематической паре, положение манипуляционной системы в пространстве будет меняться.

1.1.1.1 Метод двух связанных систем координат

Положение движущегося тела в пространстве может быть определено по положению связанной с ним системы координат относительно неподвижной системы координат по трём координатам её начала и тремя углами между соответствующими осями этих систем координат. Таким образом, в общем случае твёрдое тело обладает шестью степенями свободы. При наличии связей, ограничивающих движение тела, число степеней свободы уменьшается.

Поскольку манипуляционные системы представляют собой разомкнутые кинематические цепи, состоящие из звеньев, образующих между собой кинематические пары пятого класса, то каждое звено кинематической цепи, кроме последнего, входит в две кинематические пары. Поэтому целесообразно с каждым звеном связать две системы координат, поместив их начала в центры кинематических пар.

В центре кинематической пары, соединяющей i -е и $(i-1)$ -е звенья, поместим систему координат $S_i (X_i, Y_i, Z_i)$, ось Z_i которой направим вдоль оси относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев. Если эта ось перпендикулярна прямой, соединяющей центры кинематических пар i -го звена, то ось X_i направляется по этой прямой. В центре кинематической пары i -го и $(i+1)$ -го звеньев поместим систему координат $S_{i^*} (X_{i^*}, Y_{i^*}, Z_{i^*})$. Оси X_{i^*} , Y_{i^*} и Z_{i^*} направим так, чтобы системы S_{i^*} и $S_{(i+1)}$ совпадали в исходном положении манипуляционной системы (рис. 1.5).

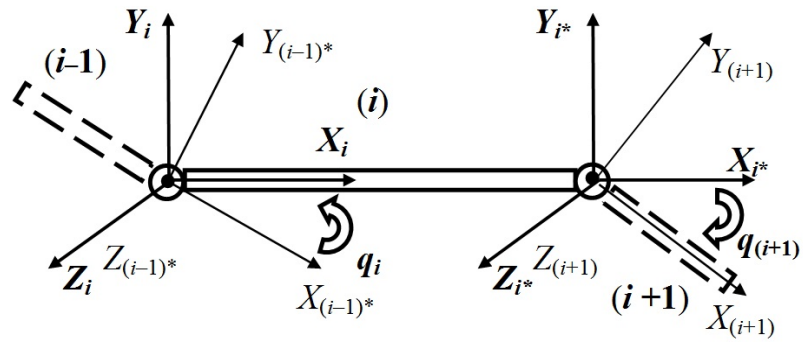
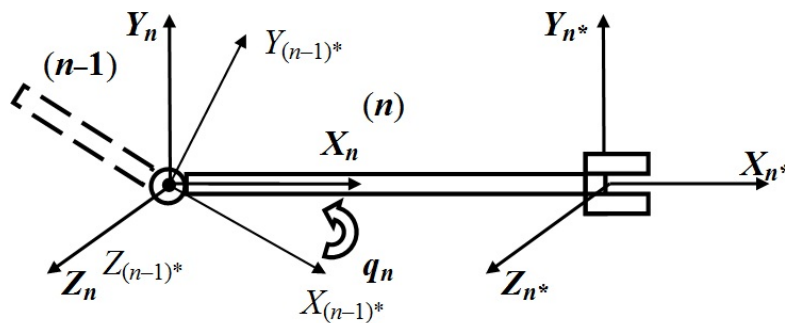


Рис. 1.5. Связанные системы координат

Выберем направление нумерации звеньев от основания манипуляционной системы. В характерной точке выходного звена, схвата или рабочего инструмента поместим начало системы координат S_n^* (X_n^*, Y_n^*, Z_n^*) (n – число звеньев манипуляционной системы). Ось X_n^* расположим в продольном направлении по оси симметрии схвата, а ось Z_n^* – в его плоскости симметрии. Орты этой системы координат определяют ориентацию схвата в пространстве (рис. 1.6).

Рис. 1.6. Система координат S_n^*

Рабочее пространства и движение манипуляционной системы описывается в неподвижной системе координат S_0 . Дополнительно можно использовать систему координат S_0^* , жёстко связанную с неподвижным основанием. Начало системы координат S_0^* помещают в центр первой кинематической пары, а оси направляют так, чтобы системы S_0^* и S_1 совпадали в исходном положении манипуляционной системы. Иногда системы координат совмещают S_0 и S_0^* . Введенные системы координат представлены на рис. 1.7.

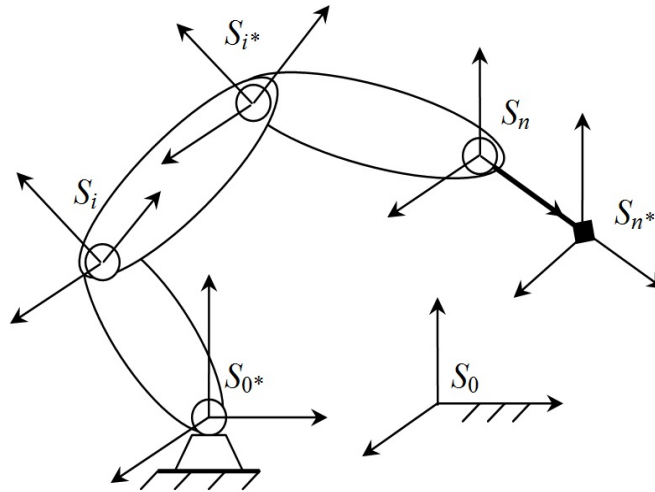


Рис. 1.7. Системы координат S_0 , S_{0*} , S_i , S_{i*} и S_{n*}

Задание систем координат S_0 , S_{0*} , S_i , S_{i*} и S_{n*} , связываемых со звеньями и неподвижным основанием, позволяет определить ориентацию звеньев в рабочем пространстве манипуляционной системы, а также описать в этом пространстве траектории движения её характерных точек.

1.1.1.2 Матрицы преобразования однородных координат

Относительное положение связанных систем координат S_i и S_{i*} , $i = 1 \dots n$, может быть определено матрицей преобразования однородных координат, имеющей размерность 4×4 [31, 66].

$$A_{i,i*} = \begin{bmatrix} \cos(X_i, X_{i*}) & \cos(X_i, Y_{i*}) & \cos(X_i, Z_{i*}) & l_{xi} \\ \cos(Y_i, X_{i*}) & \cos(Y_i, Y_{i*}) & \cos(Y_i, Z_{i*}) & l_{yi} \\ \cos(Z_i, X_{i*}) & \cos(Z_i, Y_{i*}) & \cos(Z_i, Z_{i*}) & l_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & L_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\cos(X_i, X_{i*})$ и т.д. – косинусы углов между соответствующими осями координат (являются элементами матрицы поворота (подматрицы) R_i размерности 3×3); $L_i = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}]^T$ – координаты начала системы S_{i*} в системе S_i .

В исходном положении манипуляционная система задаётся матрицами R_i , $i = 1 \dots n$. Элементы матрицы R_i определяют ориентацию системы S_{i*} в системе координат S_i в исходном положении (до начала движения). Если за исходное поло-

жение принимается прямолинейная или ломаная под прямыми углами конфигурация манипуляционной системы, то компоненты матрицы R_i принимают значения 0 или 1.

Так как за ось относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев выбрана ось Z_i , матрица, определяющая положение системы S_i относительно системы $S_{(i-1)*}$, будет иметь вид,

если i -я кинематическая пара вращательная:

$$A_{(i-1)*,i} = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & 0 \\ \sin(q_i) & \cos(q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

если i -я кинематическая пара поступательная:

$$A_{(i-1)*,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где q_i – i -я обобщённая (шарнирная) координата.

При составлении матрицы $A_{(i-1)*,i}$, $i = 1 \dots n$, необходимо учитывать правило знаков для обобщённых координат:

– i -я вращательная обобщённая координата считается положительной, если отсчёт её от исходного положения манипуляционной системы ведётся так, что для совмещения систем $S_{(i-1)*}$ и S_i систему S_i необходимо повернуть вокруг оси Z_i на угол q_i против хода часовой стрелки при наблюдении поворота с положительного направления этой оси;

– i -я поступательная обобщённая координата считается положительной, если отсчёт её от исходного положения многозвенной механической системы ведётся в положительном направлении оси Z_i .

Матрица $A_{(i-1),i}$, определяющая относительное положение двух соседних звеньев, может быть представлена произведением матриц:

$$A_{(i-1),i} = A_{(i-1), (i-1)*} A_{(i-1)*,i}, \quad (1.4)$$

где матрица $A_{(i-1), (i-1)*}$ аналогична матрице $A_{i, i*}$ см. (1.1).

Матрица преобразования однородных координат из системы S_k , связанной с k -м звеном, в неподвижную систему S_0 может быть определена как последовательность произведений матриц $A_{(i-1),i}$, $i = 1 \dots k$:

$$A_{0,k} = A_{0,1} A_{1,2} \dots A_{(i-1),i} A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}. \quad (1.5)$$

1.1.1.3 Методика построения геометрических моделей

Геометрическая модель манипуляционных систем как математическая модель представляет собой множество матриц (4×4) преобразования однородных координат, определяемых выражением (1.5)

$$A_{0,k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}, \quad k=1, \dots, n,$$

выполняющих отображения:

$$A_{(i-1),i} : S_i \rightarrow S_{(i-1)}, \quad A_{0,k} : S_k \rightarrow S_0, \quad k=1 \dots n,$$

где S_k – система координат, связанная с k -м звеном; S_0 – система координат, связанная с неподвижным основанием; $A_{(i-1),i}$ – матрица (4×4), выполняющая преобразование однородных координат из системы S_i , связанной с i -м звеном, в систему $S_{(i-1)}$, связанную с $(i-1)$ -м; n – количество звеньев в манипуляционной системе робота.

Структура матрицы преобразования однородных координат $A_{0,k}$ имеет вид

$$A_{0,k} = \begin{bmatrix} & 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ & R_{0,k} & \bar{r}_{0k}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

где $R_{0,k}$ – матрица поворота (3×3), содержащая косинусы углов между соответствующими осями систем координат S_0 и S_k ; $\bar{r}_{0k}^{(0)} = (x_{0k}^{(0)} \quad y_{0k}^{(0)} \quad z_{0k}^{(0)})$ – радиус-вектор точки O_k , являющейся началом системы ординат S_k , проведенный из начала системы S_0 .

Для произвольной точки M , выбранной на k -м звене (рис. 1.8), матрицы преобразования однородных координат (1) позволяют получить простую форму выражения, реализующего эти преобразования

$$r_M^{(0)} = A_{0,k} r_M^{(k)}, \quad (1.7)$$

где $r_M^{(0)} = [x_M^{(0)} \ y_M^{(0)} \ z_M^{(0)} \ 1]^T$ – расширенный радиус-вектор точки M в неподвижной системе S_0 , $r_M^{(k)} = [x_M^{(k)} \ y_M^{(k)} \ z_M^{(k)} \ 1]^T$ – расширенный радиус-вектор точки M в связанной системе S_k .

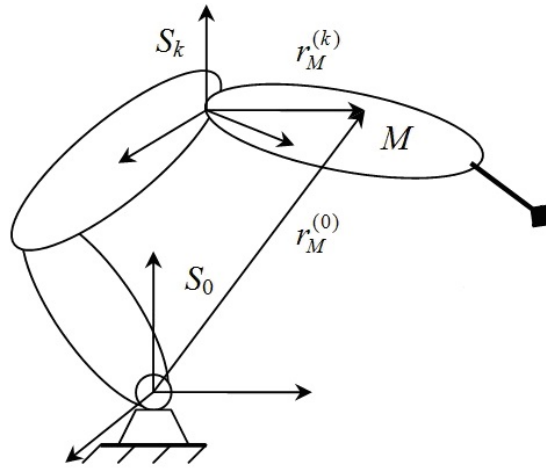


Рис. 1.8. Системы координат S_k и S_0

Использование двух связанных с каждым звеном систем координат $S_i (X_i, Y_i, Z_i)$ и $S_i^* (X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$, позволяет внутри звена выполнять преобразования в соответствии с (1.1–1.4)

$$A_{(i-1),i} : S_i \rightarrow S_{(i-1)^*} \rightarrow S_{(i-1)}, \quad A_{(i-1),i}(q_i) = A_{(i-1),(i-1)^*} A_{(i-1)^*,i}(q_i), \quad (1.8)$$

$$A_{(i-1),(i-1)^*}^{4 \times 4} = \begin{bmatrix} R_{(i-1),(i-1)^*}^{3 \times 3} & L_{(i-1),(i-1)^*}^{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

$$A_{(i-1)^*,i}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i q_i) & -\sin(\beta_i q_i) & 0 & 0 \\ \sin(\beta_i q_i) & \cos(\beta_i q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1 - \beta_i) q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

где $R_{(i-1),(i-1)^*}$ – матрица (3×3) поворота систем координат $S_{(i-1)}$ и $S_{(i-1)^*}$; $L_{(i-1),(i-1)^*}$ – вектор (3×1) координат начала системы $S_{(i-1)^*}$, в системе $S_{(i-1)}$, β_i определяет вид i -й кинематической пары: $\beta_i = 1$ – вращательная, $\beta_i = 0$ – поступательная.

Исходными данными для составления матриц (1.8–1.10) являются [13]:

n – число степеней свободы исполнительного механизма;

P – массив, определяющий вид и последовательность расположения кинематических пар (рис. 1.4);

L – массив векторов, содержащих координаты начал систем S_i^* в соответствующих системах координат S_i ;

R – массив матриц поворота, определяющих ориентацию систем S_i^* в системах координат S_i .

Представленная методика построения геометрической (математической) модели, позволяет определять положение манипуляционной системы робота в пространстве, задаваемом неподвижной системой координат S_0 . Эту систему координат в литературе по робототехнике часто называют базовой системой координат $S_0 \equiv \text{BASE}$. Систему координат S_0^* называют мировой системой координат $S_0^* \equiv \text{WORLD}$ (рис. 1.9).

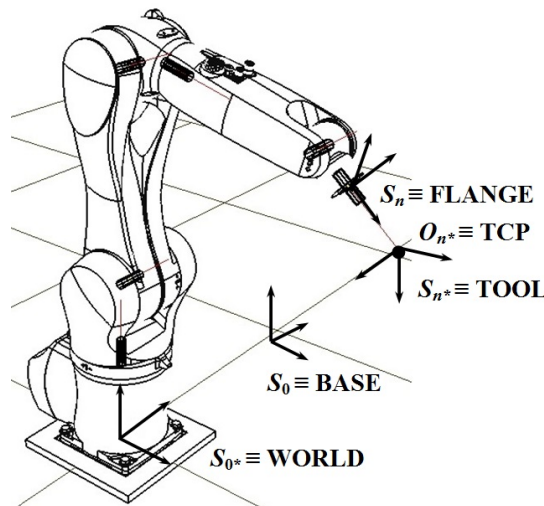


Рис. 1.9. Системы координат: BASE, WORLD, FLANGE и TOOL

Система координат S_n , связываемая с последним звеном манипуляционной системы, в промышленной робототехнике помещается в центре установочного фланца, на котором закрепляется рабочий инструмент, поэтому для обозначения этой системы координат используют специальное название $S_n \equiv \text{FLANGE}$.

И наконец, система координат S_{n^*} , используется для задания положения рабочего инструмента, закрепляемого на установочном фланце робота $S_{n^*} \equiv \text{TOOL}$. Начало этой системы координат помещают в точку O_{n^*} называемую центром инструмента (TCP – Tool center point) (рис. 1.9).

Существует Межгосударственный стандарт ГОСТ 30097–93 «Роботы промышленные. Системы координат и направления движений».

Метод двух связанных систем координат, положенный в основу методики построения геометрических моделей манипуляционных систем роботов, и использование аппарата матриц преобразования координат для его математического описания, позволяют в математической модели (1.8–1.10) выделить две части (1.9) и (1.10).

Одна часть (1.9) зависит только от геометрических (конструктивных) параметров манипуляционной системы и поэтому остаётся неизменной в процессе её движения. Другая часть (1.10), зависит от положения манипуляционной системы в пространстве, определяемом значениями обобщённых (шарнирных) координат q_i , $i=1..n$. Поэтому эта часть геометрической модели изменяется в процессе движения манипуляционной системы.

Такое разделение геометрической модели на части позволяет в дальнейшем в математических моделях, построенных на её основе для моделирования движения манипуляционных систем, выполнять операцию дифференцирования только над изменяющейся частью, а в неизменяющейся части учитывать первичные геометрические отклонения (угловые и линейные) звеньев, вызванные неточностью изготовления и сборки составляющих их деталей.

1.1.2 Прямая задача кинематики. Функция положения

Прямая задача кинематики манипуляционных систем заключается в нахождении абсолютных (декартовых) координат точек, связанных со звеньями, в неподвижной системе координат на основе обобщённых (шарнирных) координат манипуляционных систем.

Для определения положения точки в пространстве будем использовать матрицы преобразования однородных координат (1.1–1.5). Тогда абсолютные координаты точки M k -го звена в неподвижной системе координат S_0 (рис. 1.8), составляющие проекции радиус-вектора $r_M^{(0)} = [x_M^{(0)} \quad y_M^{(0)} \quad z_M^{(0)} \quad 1]^T$, можно определить из уравнения

$$r_M^{(0)} = A_{0,1}(q_1)A_{0,2}(q_2)\dots A_{(k-1),k}(q_k)r_M^{(k)}, \quad (1.11)$$

где $r_M^{(k)} = [x_M^{(k)} \quad y_M^{(k)} \quad z_M^{(k)} \quad 1]^T$ – радиус-вектор, определяющий локальные координаты точки M , заданные в системе координат S_k , связанной с k -м звеном; $A_{(k-1),k}$ – матрица (4×4) преобразования однородных координат аналогичная (1.4).

Произведение матриц в уравнении (1.11) с помощью выражения (1.5) может быть представлено в виде

$$r_M^{(0)} = A_{0,k}(q)r_M^{(k)}. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) называют функцией положения точки, а решение этого уравнения при заданном векторе обобщённых координат q – решением прямой задачи кинематики. Данное уравнение объективно отражает назначение введенного ранее понятия геометрической модели, как математической модели выполняющей отображения координат: $A_{0,k}:S_k \rightarrow S_0, k=1\dots n$.

1.1.2.1 Вычисление кинематических параметров

Кинематическими параметрами манипуляционных систем являются угловые и линейные скорости и ускорения звеньев и их характерных точек [31, 133–135, 141]. Для получения линейных кинематических параметров необходимо продифференцировать функцию положения соответствующее число раз.

Линейная скорость точки M k -го звена в системе S_0 будет иметь вид

$$v_M^{(0)} = \frac{dr_M^{(0)}}{dt} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} \dot{q}_i r_M^{(k)}, \quad (1.13)$$

а линейное ускорение той же точки – вид

$$a_M^{(0)} = \frac{d^2 r_M^{(0)}}{dt^2} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) r_M^{(k)}. \quad (1.14)$$

Чтобы определить угловые кинематические параметры манипуляционной системы, введём вектор относительной угловой скорости звеньев i -й кинематической пары в системе S_i , который при выбранных осях координат будет иметь вид

$$\omega_{(i-1),i}^{(i)} = [0 \quad 0 \quad \dot{q}_i \quad 0]^T, \quad (1.15)$$

где \dot{q}_i – первая производная от i -й обобщённой координаты по времени.

Угловая скорость звеньев i -й кинематической пары в абсолютной системе координат S_0 может быть представлена выражением

$$\omega_{(i-1),i}^{(0)} = A_{0,i} \omega_{(i-1),i}^{(i)}. \quad (1.16)$$

Абсолютная угловая скорость k -го звена в системе S_0 может быть представлена в виде суммы относительных угловых скоростей:

$$\omega_k^{(0)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \omega_{(i-1),i}^{(0)}, \quad (1.17)$$

где β_i – коэффициент [см. (1.3)].

Продифференцировав выражение (1.17) по времени, получим выражение для углового ускорения k -го звена:

$$\varepsilon_k^{(0)} = \frac{d\omega_k^{(0)}}{dt} = \varepsilon_{(k-1)}^{(0)} + \dot{A}_{0,k} \omega_{(k-1),k}^{(k)} + A_{0,k} \dot{\omega}_{(k-1),k}^{(k)}. \quad (1.18)$$

Рекуррентная форма выражения (1.18) удобна для кинематического анализа манипуляционных систем, однако для удобства программирования вычислительного алгоритма в представленном выражении векторы ω необходимо заменить, согласно (1.15), на соответствующие им производные обобщённых координат.

1.1.2.2 Матрицы дифференцирования

В математических моделях, используемых для вычисляющих кинематических параметров необходимо вычислять частные производные от матриц преобразования однородных координат, по соответствующим обобщённым координатам см. (1.13 и 1.14)

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}, \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i^2}, \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} \quad (i, j, k = 1 \dots n).$$

В соответствии с методикой построения геометрических моделей (см. п. 1.1.4), разработанной на основе метода двух связанных систем координат (см. п. 1.1.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} &= A_{0,1} A_{1,2} \dots \frac{\partial A_{(i-1),j}}{\partial q_i} \dots A_{(k-1),k}, \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i^2} &= A_{0,1} A_{1,2} \dots \frac{\partial^2 A_{(i-1),j}}{\partial q_i^2} \dots A_{(k-1),k}, \quad \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} = A_{0,1} A_{1,2} \dots \frac{\partial A_{(i-1),j}}{\partial q_i} \dots \frac{\partial A_{(j-1),j}}{\partial q_j} \dots A_{(k-1),k}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

На основе матричного выражения (1.8) можно записать

$$\frac{\partial A_{(i-1),j}}{\partial q_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,j}}{\partial q_i}. \quad (1.20)$$

Матрица $A_{(i-1)^*,j}$ имеет вид (1.10). Как все матрицы преобразования однородных координат данная матрица имеет структуру аналогичную (1.1) или (1.6). Используя свойство ортогональности матриц поворота R , являющихся подматрицами матриц преобразования однородных координат, операция дифференцирования может быть заменена операцией умножения матриц

$$\frac{\partial A_{(i-1)^*,j}}{\partial q_i} = D_i A_{(i-1)^*,j} = A_{(i-1)^*,j} D_i, \quad (1.21)$$

где D_i – специальная матрица.

Матрицы D_i дифференцирования матриц преобразования однородных координат имеют вид:

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_i & 0 & 0 \\ \beta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

где β_i – коэффициент, соответствующий виду i -й кинематической пары. $\beta_i = 1$, если i -я кинематическая пара вращательная и $\beta_i = 0$, если – поступательная.

Вычисление соответствующих дифференцированию матриц преобразования однородных координат (1.19) может быть выполнено с использованием вспомогательных матриц D_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial q_i} &= A_{(i-1),i} D_i; & \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} &= A_{0,(i-1)} A_{(i-1),i} D_i A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k}; \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} &= A_{0,1} A_{1,2} \dots A_{(i-1),i} D_i A_{i,(i+1)} \dots A_{(j-1),j} D_j A_{j,(j+1)} \dots A_{(k-1),k}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Использование выражений (1.23) вместо (1.19) существенно повышает эффективность алгоритмов моделирования движения манипуляционных систем.

1.1.3 Методы решения обратной задачи кинематики

Обратная задача кинематики по положениям заключается в определении обобщённых координат манипуляционной системы по заданному в неподвижной декартовой системе координат положению и ориентации конечного звена (захватных устройств или рабочего инструмента).

Обратная задача кинематики по скоростям заключается в определении обобщённых скоростей манипуляционной системы по заданным скоростям конечного звена в неподвижной системе координат.

Решение этих задач является важной составной частью моделирования движения роботов, так как траектории и законы движения захватных устройств и ин-

струмента задаются, как правило, в декартовых координатах, а управление движением реализуется в законах изменения обобщённых координат.

Решение в явном виде обратной задачи о положениях манипуляционных систем с шестью степенями подвижности рассмотрено в работе [73]. Алгоритм решения обратной задачи методом последовательных приближений представлен в [37].

Положение рабочего органа робота в пространстве, как и положение любого твёрдого тела, можно задать с помощью шести координатных величин. Например, можно выбрать шесть наддиагональных элементов матрицы $A_{0,n}$ (a_{12} , a_{13} , a_{23} , X_n , Y_n , Z_n), осуществляющей преобразование однородных координат из системы координат S_n , связанной с рабочим органом, в неподвижную систему координат S_0 .

Если манипуляционная система робота имеет больше шести степеней свободы ($n > 6$), то одному и тому же положению рабочего органа будут соответствовать различные значения обобщённых координат. Если $n < 6$, то манипуляционная система не может выполнять произвольное движение. В этом случае нужно задать траекторию движения характерной точки рабочего органа и допустимую ориентацию инструмента на этой траектории.

Определим взаимосвязь между обобщёнными координатами и шестью выбранными параметрами. Для этого введём в рассмотрение вектор X (6×1), задающий положение конечного звена, и состоящий из двух компонент $r = f_r(q)$ и $e = f_e(q)$, являющихся функциями обобщённых координат. Здесь r – вектор (3×1), содержащий три координаты характерной точки (ТСП), а e – вектор (3×1), содержащий три угла ориентации.

Тогда можно записать матричное уравнение вида

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} r \\ e \end{Bmatrix} = \{f(q)\}, \quad \{dX\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \right\} dq_i = \begin{bmatrix} J_r \\ J_e \end{bmatrix} \{dq\} = [J] \{dq\}, \quad (1.24)$$

где $[J_r]$ и $[J_e]$ – матрицы ($3 \times n$) Якоби, $[J]$ – комбинированная матрица ($6 \times n$) Якоби.

Заменим в (1.24) дифференциалы малыми приращениями, введя $\{\Delta q\}$ – вектор приращения обобщённых координат и $\{\Delta X\}$ – приращение вектора $\{X\}$, задающего положение конечного звена, получим уравнение

$$[J]\{\Delta q\} = \{\Delta X\}. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) представляет собой постановку обратной задачи кинематики по положениям. Если уравнение (5.1) продифференцировать по времени, то получим

$$[J]\{\dot{q}\} = \{\dot{X}\}. \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) представляет собой постановку обратной задачи кинематики по скоростям.

Как видно из уравнений (1.25) и (1.26) важным вопросом, возникающим при рассмотрении обратных задач кинематики, является вопрос, связанный с формированием матриц Якоби в соответствии с (1.25).

Для определения элементов матрицы Якоби продифференцируем функцию положения, имеющую вид (1.12),

$$dr_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_i} r^{(n)} dq_i, \quad (1.27)$$

где $r^{(n)}$ – радиус-вектор (4×1) характерной точки (ТСР) в системе координат S_n ,

Выражения $\frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_i} r^{(n)}$ ($i=1 \dots n$), входящие в сумму (1.27), представляют собой

вектор (4×1). Для того чтобы из этих слагаемых сформировать элементы матрицы Якоби J_r необходимо умножить их скалярно на соответствующий орт (i, j, k).

Для формирования элементов матрицы Якоби J_e , отражающей ориентацию конечного звена в неподвижной системе координат, используем одну проекцию орта j_n и две проекции орта k_n системы координат S_n на оси неподвижной системы координат S_0 , задаваемых ортами i_0, j_0 и k_0 . Это эквивалентно выбору в качестве углов, задающих ориентацию рабочего органа, углов между осями X_0 и Y_n, X_0 и Z_n , и Y_0 и Z_n .

Уравнение (1.25) в поэлементном представлении имеет вид

$$\begin{bmatrix} i_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_1} r^{(n)} & \dots & i_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_n} r^{(n)} \\ j_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_1} r^{(n)} & \dots & j_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_n} r^{(n)} \\ k_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_1} r^{(n)} & \dots & k_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_n} r^{(n)} \\ i_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_1} j_n & \dots & i_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_n} j_n \\ i_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_1} k_n & \dots & i_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_n} k_n \\ j_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_1} k_n & \dots & j_0^T \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_n} k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \dots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta e_{X_0 Y_6} \\ \Delta e_{X_0 Z_6} \\ \Delta e_{Y_0 Z_6} \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

где $i_0 \equiv i$, $(j_0, j_n) \equiv j$, $k_n \equiv k$ – орты; $i^T = [1000]$, $j^T = [0100]$, $k^T = [0010]$.

Эта же или аналогичная ей матрица Якоби может быть использована в уравнении (1.26).

1.1.3.1 Численные методы решения обратной задачи кинематики

Уравнения (1.25) и (1.26) являются нелинейными, поэтому для их решения необходимо использовать численные методы. Так, если $n=6$ и $\det(J) \neq 0$ решение уравнения (1.25) может быть получено итерационно на основе численного метода решения системы линейных уравнений:

$$[J(q^k)] \{\Delta q^k\} = \{X^{k+1} - f(q^k)\}, \quad (1.29)$$

$$\{q^{k+1}\} = \{q^k\} + \{\Delta q^k\}, \quad (1.30)$$

где $\{\Delta q^k\}$ – решение уравнения (1.29) на k -м шаге итерации; $\{q^k\}$ – вектор обобщённых координат, соответствующий этому решению.

Другой способ решения может быть получен, если выразить из уравнения (1.25) вектор приращения обобщённых координат $\{\Delta q\}$:

$$\{\Delta q\} = [J]^{-1} \{\Delta X\}. \quad (1.31)$$

Тогда, если в k -й момент времени обобщённые координаты $\{q^k\}$ известны, то для следующего момента времени $k+1$ обобщённые координаты $\{q^{k+1}\}$ могут быть определены следующим образом:

$$\{q^{k+1}\} = \{q^k\} + [J(q^k)]^{-1} \{X^{k+1} - f(q^k)\}. \quad (1.32)$$

Метод, описываемый рекуррентным уравнением (1.32), основывается на численном методе обращения квадратных матриц. Этот метод менее эффективен с вычислительной точки зрения, чем первый метод, соответствующий уравнениям (1.29) и (1.30).

Достоинством обоих рассмотренных численных методов решения обратной задачи кинематики манипуляционных систем является то, что вследствие малых пошаговых изменений положения рабочего органа исключаются побочные решения, связанные с возможными различными конфигурациями звеньев при одном и том же положении рабочего органа.

1.1.3.2 Метод сингулярного разложения матрицы Якоби

Если принять $n > 6$, манипуляционная система получит кинематическую избыточность. В этом случае матрица Якоби станет не квадратной, и обратная задача кинематики будет иметь бесконечное множество решений. Кроме того, возможны особые положения манипуляционных систем, при которых ранг матрицы Якоби станет меньше 6 и соответственно $\det(J) = 0$.

Для решения обратной задачи кинематики в этих случаях может быть использован метод сингулярного разложения матрицы Якоби. Метод основан на вычислении собственных значений и собственных векторов матриц $J^T J$ и $J J^T$, полученных умножением слева и справа матрицы Якоби на соответствующую ей транспонированную матрицу.

Если $J \subset R^m \times R^n$, $rank J = k$ ($m = 6$, $k < m < n$), то

$$J = V \Omega W^T, \quad (1.33)$$

где $V \subset R^m \times R^m, W \subset R^n \times R^n, \Omega = [\sigma_{ij}] \subset R^m \times R^n, \sigma_{ij} = 0, i \neq j,$
 $\sigma_{11} \geq \dots \geq \sigma_{kk} > \sigma_{k+1,k+1} = \dots = \sigma_{ll} = 0, l = \min(m, n).$

$\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}, (i = 1 \dots k)$ – сингулярные числа, вычисляемые на основе собственных значений λ_i матрицы JJ^T , соответствующих уравнению

$$\det(\lambda_i I - JJ^T) = 0. \quad (1.34)$$

V – левые сингулярные векторы, $JJ^T \rightarrow V = [v_i], v_i \subset R^m.$

W – правые сингулярные векторы, $J^T J \rightarrow W = [w_i], w_i \subset R^n.$

Алгоритм решения обратной задачи кинематики в этом случае может быть представлен последовательностью

$$[J]\{\Delta q\} = \{\Delta X\} \rightarrow [V\Omega W^T]\{\Delta q\} = \{\Delta X\} \rightarrow [\Omega]\{W^T \Delta q\} = [V^T]\{\Delta X\}.$$

$$\{W^T \Delta q\} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X^T v_1}{\sigma_{11}} & \dots & \frac{\Delta X^T v_k}{\sigma_{kk}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, (k < m) \Rightarrow$$

$$\{\Delta q\} = \sum_{i=1}^k \frac{v_i^T \Delta X}{\sigma_{ii}} w_i. \quad (1.35)$$

1.1.3.3 Метод оптимизации

Рассмотрим уравнение, определяющее невязку численного решения обратной задачи кинематики на k -м шаге итерации:

$$\{F(q^k)\} = \{f(q^k) - X^k\} = \{0\}, \quad (1.36)$$

где $F(q^k), f(q^k) \subset R^6, \{F(q^k)\} = [F_1(q^k) \dots F_6(q^k)]^T, X^k \subset R^6$ – вектор расширенных координат для соответствующей точки траектории [см. (1.24)].

Поскольку $n > 6$, неизвестных значений $q_i^k, i = 1 \dots n (q^k \subset R^n)$, подлежащих определению, больше, чем в уравнении (1.36). Для получения дополнительных уравнений может быть использован метод оптимизации. По данному методу выполняется минимизация целевой функции, например, представляющей собой сумму квадратов разностей обобщённых координат:

$$\Phi^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i^k (q_i^k - q_i^{k-1})^2 + \sum_{j=1}^6 \lambda_j^k F_j(q^k), \quad (1.37)$$

где λ_j^k – неопределённые множители Лагранжа, $C_i^k = (p_i^k)^{-1}$ – весовые коэффициенты; $p_i^k > |q_i^k|$ – ограничения по соответствующим обобщённым координатам.

Минимизация целевой функции (1.37) выполняется на основе решения уравнения

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial q_i} = C_i^k (q_i^k - q_i^{k-1}) + \sum_{j=1}^6 \lambda_j^k \frac{\partial f_j(q^k)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (1.38)$$

Решая совместно нелинейные уравнения (1.36) и (1.38) найдём обобщённые координаты $q_i^k, i = 1 \dots n$, и неопределённые множители Лагранжа $\lambda_j^k, j = 1 \dots 6$. Если при этом получится несколько решений, то оптимальное решение будет соответствовать минимуму суммы модулей разности обобщённых координат, соответствующих полученным решениям:

$$\min_{q^k} \left(\sum_{i=1}^n C_i^k |q_i^k - q_i^{k-1}| \right) \rightarrow q^k. \quad (1.39)$$

Если какая-либо из обобщённых координат выйдет за допустимый предел $|q_i^k| < p_i^k$, то следует увеличить соответствующий весовой коэффициент.

1.2 Методы моделирования динамики манипуляционных систем роботов

1.2.1 Методы составления уравнений движения

Уравнения движения манипуляционных систем могут быть построены известными методами теоретической механики. При выборе метода необходимо учитывать, что процесс и результаты моделирования динамики манипуляционных систем существенно зависят от математических моделей, содержащих уравнения движения, получаемые на основе того или иного метода [44].

Метод Ньютона – Эйлера, основанный на одноимённых уравнениях, обладает большой вычислительной эффективностью, обусловленной векторным представлением этих уравнений, приводящихся к рекуррентной форме. Метод предполагает последовательное выполнение вычислений, сначала кинематических параметров, а уже затем на их основе составление динамической модели. По этой причине алгоритм, реализующий этот метод, иногда называют двухпроходным.

Алгоритм метода Ньютона – Эйлера на основе прямых кинематических рекуррентных уравнений, осуществляя движение от основания к рабочему органу, выполняет последовательное вычисление кинематических параметров движения звеньев, таких как линейные и угловые скорости и ускорения. При обратном движении от рабочего органа к основанию составляются рекуррентные кинетостатические уравнения, учитывающие силы и моменты, действующие на каждое из звеньев [216].

Метод Лагранжа – Эйлера основывается на уравнении Лагранжа второго рода, использующем выражение кинетической энергии манипуляционных систем через обобщённые координаты [66].

Кроме методов Ньютона – Эйлера и Лагранжа – Эйлера для построения уравнений движения манипуляционных систем могут быть использованы также и другие методы, такие как методы Даламбера [179], Гаусса [38], Аппеля [18] и связанных графов [104].

Необходимо отметить, что уравнения, полученные на основе энергетических методов, не содержат реакции связей, поэтому данные методы следует применять, когда действующие в шарнирах реакции не представляют интереса, или могут быть вычислены иными способами.

1.2.1.1 Уравнение Лагранжа

Метод позволяет получить уравнения движения, описывающие динамику жёстких манипуляционных систем, моделируемых абсолютно твёрдыми телами, на основе уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=(1, \dots, n), \quad (1.40)$$

где E – полная кинетическая энергия манипуляционной системы; Q_i – обобщённая сила, соответствующая i -й обобщённой координате; q_i – i -я обобщённая координата.

Для получения полной кинетической энергии манипуляционной системы рассмотрим кинетическую энергию элементарной массы dm , связанной с некоторой точкой M k -го звена (рис. 1.8):

$$dE = \frac{1}{2} v^{(0)2} dm. \quad (1.41)$$

Используя функцию положения (1.12) и выражение (1.13), получим

$$dE = \frac{1}{2} \left(\dot{A}_{0,k} r^{(k)} \right)^2 dm. \quad (1.42)$$

Представим скалярное произведение векторов в (1.42) матричным произведением:

$$dE = \frac{1}{2} tr \left(\dot{A}_{0,k} r^{(k)} r^{(k)T} \dot{A}_{0,k}^T \right) dm, \quad (1.43)$$

где tr – оператор, вычисления суммы диагональных элементов матрицы; $r^{(k)}$ – вектор (4×1) однородных координат массы dm .

Кинетическая энергия всего k -го звена как сплошного твёрдого тела будет равна:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} tr(\dot{A}_{0,k} r^{(k)} r^{(k)T} \dot{A}_{0,k}^T) dm. \quad (1.44)$$

Введём матрицу инерции k -го звена H_k (4×4) :

$$H_k = \int_{\Omega_k} r^{(k)} r^{(k)T} dm. \quad (1.45)$$

Тогда кинетическую энергию k -го звена можно записать в виде

$$E_k = \frac{1}{2} tr(\dot{A}_{0,k} H_k \dot{A}_{0,k}^T). \quad (1.46)$$

Полная кинетическая энергия манипуляционной системы может быть определена как сумма кинетических энергий всех звеньев:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n tr(\dot{A}_{0,k} H_k \dot{A}_{0,k}^T). \quad (1.47)$$

Подставив выражение (1.47) в уравнение (1.40), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \ddot{A}_{0,k}^T \right). \quad (1.48)$$

Полученный результат в форме (1.48) хорошо известен специалистам в области механики систем тел, однако, поскольку вывод этого результата имеет важное методическое значение в данной работе, он представлен здесь в полном объёме. В данном случае важным является преобразование выражения кинетической энергии звена с выделением в структуре этого выражения матрицы инерции.

1.2.1.2 Уравнение Аппеля

Для описания динамики манипуляционных систем кроме уравнения Лагранжа (1.40) можно использовать уравнение Аппеля [2], в которое входит функция Гиббса, определяющая энергию ускорения системы:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i, \quad i=(1, \dots, n), \quad (1.49)$$

где G – функция Гиббса; Q_i – обобщённые силы; q_i – обобщённые координаты.

Для точечной массы dm k -го звена (рис. 1.8), функция Гиббса, определяющая энергию ускорения этой массы, имеет вид

$$dG_k = \frac{1}{2} a^{(0)2} dm. \quad (1.50)$$

$a^{(0)}$ – абсолютное ускорение точечной массы dm k -го звена – с учётом (1.12)

будет иметь вид

$$a^{(0)} = \frac{d^2 r^{(0)}}{dt^2} = \ddot{A}_{0,k} r^{(k)}, \quad (1.51)$$

где

$$\ddot{A}_{0,k} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \right). \quad (1.52)$$

Таким образом,

$$dG_k = \frac{1}{2} \left(\ddot{A}_{0,k} r^{(k)} \right)^2 dm. \quad (1.53)$$

Следовательно, заменяя скалярное произведение векторов матричным, получим

$$dG_k = \frac{1}{2} tr \left(\ddot{A}_{0,k} \bar{r}^{(k)} \bar{r}^{(k)T} \ddot{A}_{0,k}^T \right) dm. \quad (1.54)$$

С учётом (1.45) окончательно получим

$$G_k = \frac{1}{2} \text{tr}(\ddot{A}_{0,k} H_k \ddot{A}_{0,k}^T). \quad (1.55)$$

Функция Гиббса для всей манипуляционной системы, как и кинетическая энергия, определяется суммированием:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{tr}(\ddot{A}_{0,k} H_k \ddot{A}_{0,k}^T). \quad (1.56)$$

Подставив выражение (1.56) в уравнение (1.49), получим

$$\frac{\partial \ddot{G}}{\partial \ddot{q}_i} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \ddot{A}_{0,k}}{\partial \ddot{q}_i} H_k \ddot{A}_{0,k}^T \right). \quad (1.57)$$

Полученная форма уравнения Аппеля (1.57) имеет правую часть, аналогичную правой части уравнения Лагранжа в виде (1.48). Данный результат отражает общность энергетического подхода к моделированию динамики манипуляционных систем.

1.2.2 Инерционные модели манипуляционных систем роботов

1.2.2.1 Матрицы инерции

При выводе выражения (1.46) для определения кинетической энергии k -го звена была введена матрица инерции H_k , имеющая размерность 4×4 и определяющая инерционные свойства k -го звена как твёрдого тела. Раскроем интеграл от матричного произведения радиус-векторов $r^{(k)} r^{(k)T}$, определяющих положение произвольной точки k -го звена в системе координат S_k , связанной с этим звеном.

$$H_k = \int_{\Omega_k} r^{(k)} r^{(k)T} dm = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_k} x^2 dm & \int_{\Omega_k} xy dm & \int_{\Omega_k} xz dm & \int_{\Omega_k} x dm \\ \int_{\Omega_k} yx dm & \int_{\Omega_k} y^2 dm & \int_{\Omega_k} yz dm & \int_{\Omega_k} y dm \\ \int_{\Omega_k} zx dm & \int_{\Omega_k} zy dm & \int_{\Omega_k} z^2 dm & \int_{\Omega_k} z dm \\ \int_{\Omega_k} xd dm & \int_{\Omega_k} yd dm & \int_{\Omega_k} zd dm & \int_{\Omega_k} dm \end{bmatrix}, \quad (1.58)$$

где Ω_k – объём k -го звена.

Элементами данной матрицы являются:

- моменты инерции k -го звена относительно плоскостей (YZ) , (XZ) , (XY) системы координат S_k

$$J_{x^2} = \int_{\Omega_k} x^2 dm, \quad J_{y^2} = \int_{\Omega_k} y^2 dm, \quad J_{z^2} = \int_{\Omega_k} z^2 dm; \quad (1.59)$$

- центробежные моменты инерции k -го звена относительно системы координат S_k

$$J_{xy} = \int_{\Omega_k} xy dm, \quad J_{xz} = \int_{\Omega_k} xz dm, \quad J_{yz} = \int_{\Omega_k} yz dm; \quad (1.60)$$

- статические моменты масс относительно плоскостей системы координат S_k

$$S_x = \int_{\Omega_k} x dm, \quad S_y = \int_{\Omega_k} y dm, \quad S_z = \int_{\Omega_k} z dm; \quad (1.61)$$

- масса звена $m = \int_{\Omega_k} dm$.

Матрица инерции H_k зависит от способа задания локальной системы координат S_k . Наиболее простой вид для однородных тел матрица инерции имеет в системе координат, оси которой совпадают с главными осями тела. В этом случае соответствующие центробежные моменты инерции оказываются равными нулю. Главные оси проходят через центр масс тела, поэтому статические моменты инерции обращаются в ноль, и матрица инерции приобретает диагональный вид. Например, для параллелепипеда (рис. 1.10) матрица инерции будет иметь вид

$$H = \text{diag} \left[\frac{ml^2}{12} \quad \frac{ma^2}{12} \quad \frac{mb^2}{12} \quad m \right]. \quad (1.62)$$

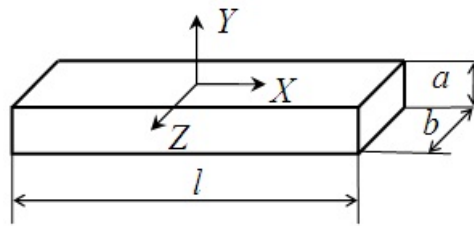


Рис. 1.10 Главные оси параллелепипеда

При моделировании движения тел системы координат, имеющие начала в центрах масс тел называют центральными.

1.2.2.2 Методика построения инерционных моделей

Поскольку сложность конструктивного исполнения звеньев манипуляционных систем существенно осложняет определение моментов инерции, необходимых для составления матрицы инерции, то для моделирования геометрии масс звеньев целесообразно применить метод декомпозиции. По данному методу при построении инерционной модели каждое звено манипуляционной системы может быть представлено в виде совокупности простых или заранее определённых геометрических тел с равномерно распределённой массой (рис 1.11).

Используемые для моделирования геометрические тела (детали) удобно разместить в банке инерционных моделей (реляционной базе данных).

В банке инерционных моделей для каждого геометрического тела (детали) получена и хранится в общем виде его матрица инерции, вычисленная относительно системы координат, связанной с центром масс тела (рис. 1.10). Далее будем называть эти системы координат центральными. Каждой детали в базе данных банка ставится в соответствие код.

Предложенная структура банка инерционных моделей обладает достаточной общностью, допускает дальнейшее расширение банка включением новых моделей, как простейших геометрических форм, так и сложных, составленных из других моделей.

Для фиксации центральных систем координат последовательного ряда деталей, моделирующих каждое звено, необходимо знать положение начал и ориентацию (поворот) этих центральных систем в системе координат, связанной с данным звеном (рис. 1.11).

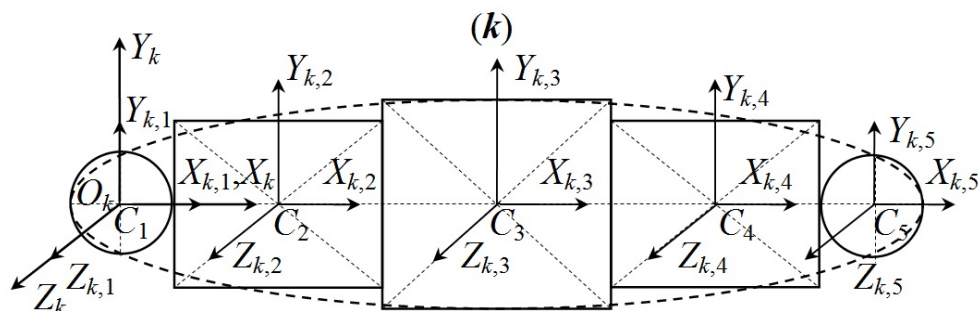


Рис. 1.11 Моделирование k -го звена геометрическими телами

На основе матриц поворота и координат начал центральных систем составляются матрицы преобразования однородных координат $A_{C_{k,j}}$, $k=1\dots n$, $j=1\dots n_k$ (n_k – число тел составляющих k -е звено), позволяющие матрицы инерции тел $H_{C_{k,j}}$, определённые в их центральных системах координат $S_{k,j}=(C_j, X_{k,j}, Y_{k,j}, Z_{k,j})$, преобразовать в матрицы инерции этих тел $H_{k,j}$, в системе координат $S_k=(O_k, X_k, Y_k, Z_k)$, связанной со звеном, моделируемым этими телами (рис. 1.12), на основе правила

$$H_{k,j} = A_{C_{k,j}} H_{C_{k,j}} A_{C_{k,j}}^T. \quad (1.63)$$

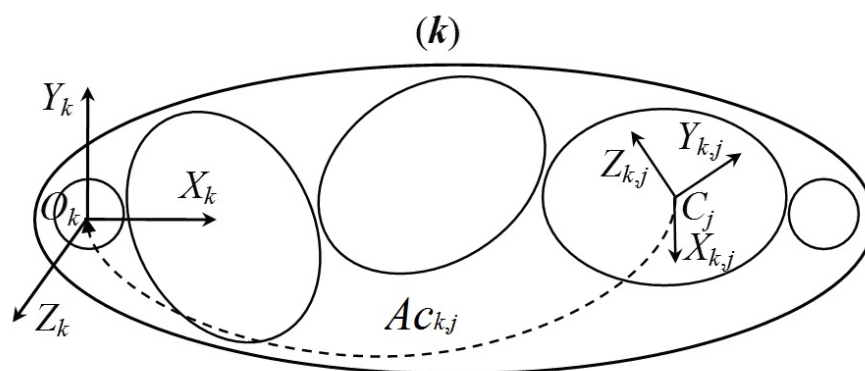


Рис. 1.12. Матрицы $A_{C_{k,j}}$ преобразования однородных координат

Матрица инерции H_k k -го звена может быть получена суммированием матриц инерции составляющих это звено тел $H_{k,j}$

$$H_k = \sum_{j=1}^{n_k} H_{k,j} . \quad (1.64)$$

Следует отметить, что структура, используемых в выражении (1.63), матриц $A_{k,j}$ преобразования однородных координат аналогична структуре матриц (1.1). Однако состав и функции этих матриц различные. Так матрицы A_{i,i^*} , $A_{(i-1)^*,i}$, $A_{(i-1),i}$, $A_{0,k}$, ($i, k=1\dots n$) относятся к геометрической модели, а матрицы $A_{k,j}$ ($k=1\dots n$, $j=1\dots n_k$) используются для построения инерционной модели.

Чтобы вычислить матрицы инерции $H_{k,j}$ каждого тела относительно своих центральных осей, необходимо знать геометрические размеры (параметры) тел. Для описания тел удобно использовать совокупность геометрических параметров:

массу детали – m ;

длину вдоль центральной оси X – l ;

линейный размер вдоль оси Y – a ;

линейный размер вдоль оси Z – b ;

внешний диаметр – d_1 ;

внутренний диаметр – d_2 .

Всего шесть параметров. Если для используемого тела какой-то параметр не определен, он заменяется нулём.

Из полученных центральных матриц инерции $H_{k,j}$ с помощью матриц преобразования однородных координат $A_{k,j}$, определяемых относительным положением центральных систем координат тел и локальной системы координат k -го звена, по правилу (1.63) для каждого тела (детали) определяются матрицы инерции $H_{k,j}$ в локальной системе координат звена. Последующим суммированием (1.64) вычисленных матриц получают матрицу инерции H_k звена относительно осей локальной системы координат этого звена. Матрицы инерции всех звеньев в совокупности составляют инерционную модель манипуляционной системы.

Для построения инерционной модели необходимы следующие данные:

ZP – вектор ($n \times 1$), содержащий количество тел (деталей) n_k , $k=1\dots n$, составляющих каждое звено;

KJ – массив векторов ($n \times n_k \times 1$), содержащих для каждого звена последовательный ряд кодов тел (деталей) из банка инерционных моделей, используемых для моделирования распределения масс, необходим для выбора матриц инерции тел $H_{Ck,j}$, $k=1 \dots n, j=1 \dots n_k$;

RC – массив векторов ($n \times n_k \times 3 \times 1$), содержащих координаты начал центральных систем тел (деталей) в локальной системе координат данного звена, необходим для составления матриц $A_{k,j}$, $k=1 \dots n, j=1 \dots n_k$;

OR – массив матриц ориентации ($n \times n_k \times 3 \times 3$) центральных систем координат тел (деталей) относительно локальной системы координат соответствующего звена, необходим для составления матриц $A_{k,j}$, $k=1 \dots n, j=1 \dots n_k$;

GP – массив векторов ($n \times n_k \times 6 \times 1$) упорядоченных геометрических параметров тел (деталей), составляющих каждое звено (см. выше), необходим для вычисления значений элементов выбранных матриц инерции тел $H_{Ck,j}$, $k=1 \dots n, j=1 \dots n_k$.

Упорядоченный набор, представленных исходных данных, является исчерпывающим для большинства случаев моделирования инерционных свойств звеньев манипуляционных систем роботов.

Выражения (1.63) и (1.64) представляют собой математическую модель, лежащую в основе алгоритма составления инерционных моделей манипуляционных систем. Для его эффективной работы может быть в дополнении к банку (базе данных), содержащему матрицы инерции тел наиболее часто встречающихся при моделировании звеньев роботов, использована программа автоматической конечно-элементной разбивки объёмов деталей, составляющих звенья.

Выделенные упорядоченные структуры данных и рассмотренная последовательность действий по их преобразованию составляют методику создания инерционных моделей манипуляционных систем роботов, рассматриваемых как математические модели, описывающие распределение масс внутри звеньев манипуляционных систем и отражающие их инерционные свойства, представляющие собой множество матриц (4×4) инерции H_k , $k=1 \dots n$, вычисляемых для каждого звена на основе центральных матриц инерции $H_{Ck,j}$, $j=1 \dots n_k$ тел простой геометрической формы, из которых могут быть составлены звенья.

1.2.3 Моделирование обобщённых сил

В предыдущих пунктах данного параграфа дан подробный вывод левой части уравнений, описывающих движение манипуляционных систем роботов. Левая часть этих уравнений отражает влияние инерционных факторов на динамику движения манипуляционных систем. Для формирования этой части уравнения движения предложено использовать инерционную модель, которая в дополнении к геометрической модели создаёт необходимый набор элементов для создания динамической модели манипуляционных систем. Однако этот набор составных элементов не является достаточным.

Для завершения динамической модели необходимо сформировать правую часть полученных уравнений движения. Для этого необходимо разработать методику моделирования сил, действующих на звенья манипуляционных систем, с приведением этих сил к обобщённому виду.

1.2.3.1 Элементарная работа внешних сил

Элементарной называется работа, выполняемая силами на возможных малых (элементарных) перемещениях звеньев механической системы. Обобщённая сила Q_i , соответствующая обобщённой координате q_i , определяется как коэффициент (скалярная величина) при вариации δq_i в выражении для элементарной работы δW , совершаемой всеми активными силами:

$$\delta W = \sum Q_i \delta q_i. \quad (1.65)$$

Определим элементарные работы внешних сил (F), действующих на звенья манипуляционных систем. Заменим систему сил F_k , действующих на k -е звено, главным вектором R_k ($R_k = \sum F_k$) и главным моментом M_k ($M_k = \sum r_k \times F_k$). За центр приведения более удобно принимать центр тяжести звена, который будем определять расширенным радиусом-вектором $r_{Ck}^{(k)}$ в системе S_k . Главный вектор R_k и главный момент M_k в инерциальной системе координат S_0 будем представлять четырёхмерными векторами:

$$R_k = [R_{kx} \quad R_{ky} \quad R_{kz} \quad 0]^T, \quad (1.66)$$

$$M_k = [M_{kx} \quad M_{ky} \quad M_{kz} \quad 0]^T, \quad (1.67)$$

Запишем выражения для элементарных работ, совершаемых главным вектором и главным моментом на возможном перемещении k -го звена:

$$\delta W_{Rk} = R_k \circ \delta r_{Ck}^{(0)}, \quad (1.68)$$

$$\delta W_{Mk} = M_k \circ \delta \varphi_k^{(0)}, \quad (1.69)$$

где $\delta r_{Ck}^{(0)}$ – возможное перемещение центра тяжести k -го звена (точка приведения сил) в инерциальной системе координат S_0 ; $\delta \varphi_k^{(0)}$ – возможный поворот k -го звена в инерциальной системе координат S_0 ; \circ – операция скалярного умножения векторов.

В развёрнутом виде векторы $\delta r_{Ck}^{(0)}$ и $\delta \varphi_k^{(0)}$ могут быть представлены выражениями

$$\delta r_{Ck}^{(0)} = \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} r_{Ck}^{(k)} \delta q_1 + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} r_{Ck}^{(k)} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_k} r_{Ck}^{(k)} \delta q_k, \quad (1.70)$$

$$\delta \varphi_k^{(0)} = A_{0,1} \Theta_1 \delta q_1 + A_{0,2} \Theta_2 \delta q_2 + \dots + A_{0,k} \Theta_k \delta q_k. \quad (1.71)$$

В уравнении (1.71) $\Theta_i, i=(1, \dots, k)$, представляет собой единичный вектор относительного поворота i -го звена и для принятого расширенного способа задания координат имеет вид

$$\Theta_i = [0 \quad 0 \quad \beta_i \quad 0]^T, \quad (1.72)$$

где $\beta_i = 1$ – для вращательной кинематической пары; $\beta_i = 0$ – для поступательной кинематической пары.

Учитывая изложенное и сгруппировав члены при δq_i , ($i=1, \dots, k$), запишем выражение для элементарной работы δW_k внешних сил F_k , действующих на k -е звено, представленных главным вектором R_k и главным моментом M_k :

$$\delta W_k = \delta W_{Rk} + \delta W_{Mk}, \quad (1.73)$$

или

$$\begin{aligned} \delta W_k = & \left(R_k \circ \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} r_{Ck}^{(k)} \right) + M_k \circ (A_{0,1} \Theta_1) \right) \delta q_1 + \\ & + \left(R_k \circ \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} r_{Ck}^{(k)} \right) + M_k \circ (A_{0,2} \Theta_2) \right) \delta q_2 + \dots + \\ & + \left(R_k \circ \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_k} r_{Ck}^{(k)} \right) + M_k \circ (A_{0,k} \Theta_k) \right) \delta q_k. \end{aligned} \quad (1.74)$$

1.2.3.2 Модель внешних сил

Составим математическую модель для определения обобщённых сил от внешних сил, действующих на звенья манипуляционной системы. Для этого в выражении (1.74) для элементарной работы δW_k внешних сил F_k , действующих на k -е звено, заменим скалярное произведение векторов матричным ($V_1 \circ V_2 = tr[V_1 V_2^T]$, tr – след матрицы):

$$\begin{aligned} \delta W_k = & tr \left[R_k r_{Ck}^{(k)T} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} + M_k \Theta_1^T A_{0,1}^T \right] \delta q_1 + \\ & + tr \left[R_k r_{Ck}^{(k)T} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} + M_k \Theta_2^T A_{0,2}^T \right] \delta q_2 + \dots + \\ & + tr \left[R_k r_{Ck}^{(k)T} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_k} + M_k \Theta_k^T A_{0,k}^T \right] \delta q_k. \end{aligned} \quad (1.75)$$

В окончательном виде элементарную работу внешних сил, действующих на k -е звено, представим выражением

$$\begin{aligned} \delta W_k = tr \left[F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} + F_{Mk,1} A_{0,1}^T \right] \delta q_1 + \\ + tr \left[F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} + F_{Mk,2} A_{0,2}^T \right] \delta q_2 + \dots + \\ + tr \left[F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_k} + F_{Mk,k} A_{0,k}^T \right] \delta q_k, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где F_{Rk} и $F_{Mk,i}$ – соответственно матрицы сил и моментов, определяемые выражениями

$$F_{Rk} = R_k r_{Ck}^{(k)T} = \begin{bmatrix} R_{kx} x_{Ck}^k & R_{kx} y_{Ck}^k & R_{kx} z_{Ck}^k & R_{kx} \\ R_{ky} x_{Ck}^k & R_{ky} y_{Ck}^k & R_{ky} z_{Ck}^k & R_{ky} \\ R_{kz} x_{Ck}^k & R_{kz} y_{Ck}^k & R_{kz} z_{Ck}^k & R_{kz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.77)$$

$$F_{Mk,i} = M_k \Theta_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_i M_{kx} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_i M_{ky} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_i M_{kz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.78)$$

По определению, обобщённая сила Q_i равна коэффициенту перед вариацией δq_i , $i=(1, \dots, n)$. Следовательно, составляющие обобщённой силы Q_{Fi} , $i=(1, \dots, n)$, соответствующие действию внешних сил F_k , представленных главным вектором R_k и главным моментом M_k , $k=(1, \dots, n)$, можно выделить из уравнения (1.76) элементарной работы внешних сил, действующих на k -е звено, в форме выражений, сто-

ящих перед соответствующими вариациями обобщённых координат δq_i . Полная обобщённая сила Q_{Fi} , соответствующая действию всех внешних сил $F = \sum F_k$, $k=(1, \dots, n)$, вычисляется суммированием по всем звеньям манипуляционной системы соответствующих составляющих δW_k полной элементарной работы:

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \delta W_k = \sum_{i=1}^n Q_{Fi} \delta q_i. \quad (1.79)$$

С учётом того, что $\frac{\partial A_{0,i}}{\partial q_{i+1}} = 0$, выражение для Q_{Fi} можно представить в виде

$$Q_{Fi} = \sum_{k=i}^n tr \left(F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_i} + F_{Mk,i} A_{0,i}^T \right). \quad (1.80)$$

Выражение для вектора обобщённых сил, соответствующих внешним силам, Q_F будет иметь вид

$$Q_F = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n tr \left(F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} + F_{Mk,1} A_{0,1}^T \right) \\ \sum_{k=2}^n tr \left(F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} + F_{Mk,2} A_{0,2}^T \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ tr \left(F_{Rn} \frac{\partial A_{0,n}^T}{\partial q_n} + F_{Mn,n} A_{0,n}^T \right) \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

1.2.3.3 Альтернативная модель внешних сил

Если скалярное произведение векторов в выражении (1.74) для элементарной работы внешних сил, действующих на k -е звено, заменить на матричное произведение, по правилу $V_1 \circ V_2 = V_1^T V_2$, то после выполнения суммирования соглас-

но (1.79) получим выражение для обобщённой силы, соответствующей действию всех внешних сил, в виде

$$Q_{Fi} = \sum_{k=i}^n \left(R_k^T \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} r_{Ck}^{(k)} + M_k^T A_{0,i} \Theta_i \right). \quad (1.82)$$

Выражение (1.82) имеет некоторые вычислительные преимущества перед выражением (1.80).

1.2.3.4 Модель консервативных сил

Обобщённые силы, соответствующие действию консервативных (потенциальных) сил, к которым относятся силы тяжести звеньев и перемещаемого груза (инструмента), а также силы упругости, возникающие в элементах конструкции робота, могут быть определены дифференцированием выражения для потенциальной энергии P_G манипуляционной системы по соответствующей обобщённой координате:

$$Q_{Gi} = \frac{\partial P_G}{\partial q_i}, \quad i = (1, \dots, n). \quad (1.83)$$

Потенциальная энергия манипуляционной системы в гравитационном поле может быть представлена выражением

$$P_G = \sum_{i=1}^n P_{Gi} = \sum_{i=1}^n f_{Gi}^{(0)} \circ (A_{0,i} r_C^{(i)}), \quad (1.84)$$

где $r_C^{(i)} = [x_c^i y_c^i z_c^i 1]^T$ – радиус-вектор центра тяжести i -го звена в системе координат S_i ; $f_{Gi}^{(0)} = [f_{Gix} f_{Giy} f_{Giz} 0]^T$ – вектор силы тяжести i -го звена в системе S_0 .

Заменим в выражении (1.84) скалярное произведение векторов его матричным представлением:

$$P_G = \sum_{i=1}^n \text{tr}(f_{Gi}^{(0)} r_C^{(i)T} A_{0,i}^T) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(F_{Gi} A_{0,i}^T). \quad (1.85)$$

Здесь F_{Gi} обозначена матрица силы тяжести i -го звена, определяемая следующим образом:

$$F_{Gi} = \begin{bmatrix} f_{Gix} x_C^i & f_{Gix} y_C^i & f_{Gix} z_C^i & f_{Gix} \\ f_{Giy} x_C^i & f_{Giy} y_C^i & f_{Giy} z_C^i & f_{Giy} \\ f_{Giz} x_C^i & f_{Giz} y_C^i & f_{Giz} z_C^i & f_{Giz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.86)$$

Подставив в (1.83) выражение (1.85), получим

$$Q_{Gi} = \sum_{k=i}^n tr \left[F_{Gk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_i} \right]. \quad (1.87)$$

Вектор обобщённых сил, соответствующий силам тяжести Q_G , может быть представлен в матричном виде аналогично (1.81). Отметим, что выражение (1.87) соответствует выражению (1.80) в части задания обобщённой силы от главных векторов внешней нагрузки. Поэтому рассматривая силу тяжести как составляющую внешней нагрузки, для определения обобщённых сил можно использовать выражения (1.80) или (1.82).

1.2.3.5 Усилия в приводах и вектор обобщённых сил

Обобщённые силы Q_D , соответствующие усилиям (силам, моментам сил) D_i , $i=(1, \dots, n)$, развиваемым приводами, равны самим этим усилиям, так как

$$\delta W_D = D_1 \delta q_1 + D_2 \delta q_2 + \dots + D_n \delta q_n. \quad (1.88)$$

Полную обобщённую силу, действующую на манипуляционную систему, будем обозначать вектором $\{Q\}$ размерности $n \times 1$, элементами которого Q_i , $i=(1, \dots, n)$, являются суммы всех обобщённых сил, действующих на манипуляционную систему, по соответствующей обобщённой координате (q_i):

$$\{Q\} = \{Q_F\} + \{Q_G\} + \{Q_D\}. \quad (1.89)$$

Полученные аналитические выражения для обобщённых сил позволяют составить правую часть уравнения движения манипуляционных систем.

1.3 Динамические модели и задачи моделирования динамики манипуляционных систем роботов

1.3.1 Построение основной динамической модели манипуляционных систем

Динамическими моделями называют математические модели, содержащие обыкновенные дифференциальные уравнения. Динамическая модель связывает параметры моделируемой системы и их производные по времени, что позволяет учитывать влияние предшествующего состояния системы на состояние системы в данный момент времени. Коэффициенты перед производными параметров в дифференциальных уравнениях, составляющих динамическую модель, отражают инерционные свойства моделируемой системы.

В численных методах решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вводится понятие жёстких ОДУ. Данное понятие выделяет ОДУ, в которых произведение коэффициента (константы) на параметр (переменную функцию) превышает на порядок и более текущее значение параметра. Решения таких ОДУ часто имеют разрывы и области больших градиентов, так называемые пограничные слои. Это накладывает на численные методы, используемые для интегрирования жёстких ОДУ, дополнительные условия.

В отношении динамических моделей механических систем термин «жёсткие» используется в ином смысле, чем в численных методах решения ОДУ. Динамические модели механических систем представляют собой уравнения движения этих систем, которые в механике принято различать по тому, учитываются или не учитываются в них упругие свойства моделируемой механической системы. Если упругие свойства учитываются, то динамические модели называются упругими, если не учитываются – жёсткими.

В дифференциальных уравнениях, соответствующих жёстким динамическим моделям, коэффициент перед параметром (искомой функцией), именуемый коэффициентом жёсткости (K), должен быть равен нулю ($K=0$). В упругих динамических моделях коэффициент жёсткости отличен от нуля ($K>0$).

На основе уравнений движения, полученных энергетическими методами (см. п. 1.2.1), могут быть построены жёсткие динамические модели манипуляционных систем. Рассмотрим уравнение движения

$$\sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \ddot{A}_{0,k}^T \right) = Q_s, s=(1, \dots, n). \quad (1.90)$$

Представим матрицу $\ddot{A}_{0,k}^T$, входящую в уравнение движения (1.90), в развёрнутом виде:

$$\ddot{A}_{0,k}^T = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) = \quad (1.91)$$

$= \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_k} \ddot{q}_k +$		1)
$+ \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1^2} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_1 \dot{q}_k +$	$+ \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2^2} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_1} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_k} \dot{q}_2 \dot{q}_k +$	(1.92)
2)	3)	
$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$		
$+ \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_k^2} \dot{q}_k^2 + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_k \partial q_{k-1}} \dot{q}_k \dot{q}_{k-1}$		

Разделим полученные суммы на три группы слагаемых, выделенные сплошной линией, как показано в выражении (1.92). Добавим в каждую из групп дополнительные слагаемые, не изменяющие равенства:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_{k+1}} \ddot{q}_{k+1} &+ \dots + \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \ddot{q}_n &= 0; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_{k+1}^2} \dot{q}_{k+1}^2 &+ \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n^2} \dot{q}_n^2 &= 0; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_{k+1}} \dot{q}_1 \dot{q}_{k+1} &+ \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \dot{q}_1 \dot{q}_n &= 0; \\
\dots &\dots &\dots &\dots & (1.93) \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_k \partial q_{k+1}} \dot{q}_k \dot{q}_{k+1} &+ \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_k \partial q_n} \dot{q}_k \dot{q}_n &= 0; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_{k+1} \partial q_1} \dot{q}_{k+1} \dot{q}_1 &+ \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_{k+1} \partial q_n} \dot{q}_{k+1} \dot{q}_n &= 0; \\
\dots &\dots &\dots &\dots & \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial q_1} \dot{q}_n \dot{q}_1 &+ \dots + \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial q_{n-1}} \dot{q}_n \dot{q}_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Добавляемые слагаемые (1.93) не нарушая равенство (1.91) позволяют в уравнении (1.90) перейти к матричной форме записи. Для этого в уравнении (1.90) определим соответствие между слагаемыми из выражения (1.92), составляющими группу 1 и матрицей-строкой $[M_s]$, слагаемыми, составляющими группы 2 и 3 и матрицей $[C_s]$. Тогда уравнение (1.90) может быть представлено в виде математической модели, представляющей основную динамическую модель манипуляционных систем:

$$[M_s]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_s]\{\dot{q}\} = Q_s, \quad s=(1, \dots, n); \quad (1.94)$$

$$\{\ddot{q}\} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T; \quad \{\dot{q}\} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T;$$

$$[M_s^{(1 \times n)}(q)] = \sum_{k=1}^n [m_j^{sk}], \quad m_j^{sk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right), \quad j=(1, \dots, n);$$

$$[C_s^{(n \times n)}(q)] = \sum_{k=1}^n [c_{ij}^{sk}], \quad c_{ij}^{sk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \right), \quad i, j=(1, \dots, n).$$

1.3.2 Альтернативная динамическая модель

Если в уравнении (1.92) определить соответствие между слагаемыми групп 1, 2 и 3 и матрицами $[M]$, $[S]$ и $[K]$ соответственно, то может быть составлена альтернативная динамическая модель:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [S]\{\dot{q}^2\} + 2[K]\left\{\dot{q}_i \dot{q}_j\right\}_{i \neq j} = \{Q\}, \quad (i, j = (1, \dots, n)); \quad (1.95)$$

$$\{\ddot{q}\} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T; \quad \{\dot{q}^2\} = [\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dots, \dot{q}_n^2]^T;$$

$$\{\dot{q}_i \dot{q}_j\} = [\dot{q}_1 \dot{q}_2, \dot{q}_1 \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_1 \dot{q}_n, \dot{q}_2 \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_2 \dot{q}_n, \dot{q}_3 \dot{q}_4, \dots, \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n];$$

$$[M(q)] = \sum_{k=1}^n [m_{ij}^k], \quad m_{ij}^k = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right), \quad i, j = (1, \dots, n);$$

$$[S(q)] = \sum_{k=1}^n [s_{ij}^k], \quad s_{ij}^k = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2} \right), \quad i, j = (1, \dots, n);$$

$$[K(q)] = \sum_{k=1}^n [k_{ij}^k], \quad k_{ij}^k = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_t} \right), \quad i = (1, \dots, n),$$

$$j = \left(1, \dots, C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} \right), \quad l \text{ и } t \text{ принимают значения порядковых сочетаний из } n$$

элементов по 2 для соответствующих им индексов j .

1.3.3 Матричные коэффициенты динамических моделей

Матричные коэффициенты в динамических моделях (1.94) и (1.95) имеют

ВИД

$$[C_s] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1^2} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2^2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (1.96)$$

$$[M_s] = \sum_{k=1}^n \left[\text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) \quad \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) \quad \dots \quad \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \right], \quad (1.97)$$

$$[S] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1^2} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2^2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_n} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (1.98)$$

$$[K] = \sum_{k=2}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_3} \right) \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_3} \right) \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_3} \right) \dots \end{bmatrix}, \quad (1.99)$$

$$[M] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \end{bmatrix}. \quad (1.100)$$

Динамические модели (1.94) и (1.95) представляют собой нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Эти уравнения описывают динамику жёстких манипуляционных систем и учитывают все действующие внешние силы и моменты. Матричные коэффициенты M_s , C_s , M , S , K являются функциями обобщённых координат и зависят от геометрических и инерционных параметров манипуляционных систем.

При моделировании динамики манипуляционных систем на основе динамических моделей (1.94) и (1.95) в матричных коэффициентах этих уравнений некоторые элементы принимают нулевые значения. Одна из причин этого заключается в том, что некоторые элементы неявно присутствуют в выражениях этих коэффициентов, полученных вследствие расширения их состава за счёт дополнительных слагаемых, представленных в (1.93).

Другая причина, по которой элементы матричных коэффициентов могут принимать нулевые значения, заключается в кинематической схеме манипуляционной системы, исключаяющей динамическое взаимовлияние некоторых звеньев. Также в отдельные моменты времени, в определённых конфигурациях манипуляционной системы, некоторые элементы матричных коэффициентов могут принимать нулевые значения.

1.3.3.1 Матрица M

Матричные коэффициенты M и M_s устанавливают связь действующих на звенья сил и моментов с ускорениями обобщённых координат. $[M]$ – симметрическая матрица размерности $n \times n$. Элемент матрицы m_{ij} определяет касательную силу инерции, действующую на i -е звено под действием ускорения в j -й кинематической паре. $[M_s]$ является s -й строкой матрицы $[M]$. Матрицу $[M]$ можно представить суммой матриц:

$$[M] = \sum_{k=1}^n [m_{ij}^k], \quad m_{ij}^k = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right), \quad i, j = (1, \dots, n).$$

При вычислении матриц $[m_{ij}^k]$ необходимо иметь в виду, что элементы этих матриц m_{ij}^k будут обращаться в нуль при условии

$$m_{ij}^k = 0 \quad \text{при } i > k \text{ или } j > k, \text{ так как в этом случае } \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = 0 \left(\frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} = 0 \right). \quad (1.101)$$

В матрице $[m_{ij}^k]$ при $k=1$ необходимо вычислять только один элемент m_{111} , остальные элементы этой матрицы заполняются нулями автоматически.

Вычисляя матрицы $[m_{ij}^k]$ при $k=(2, \dots, n)$, целесообразно учитывать симметричность этих матриц, что приблизительно в 2 раза уменьшает объём вычислений.

Действительно, используя свойства матричных операций [47] $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B^T \cdot A^T)$ и симметричность матрицы инерции H , можно показать, что $[M]$ является симметрической матрицей и $m_{ij}^k = m_{ji}^k$, так как

$$\text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_i} \right) = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_i} \right). \quad (1.102)$$

1.3.3.2 Матрица S

Матричный коэффициент S определяет связь действующих на звенья сил и моментов с квадратами скоростей обобщённых координат. Элемент матрицы s_{ij} определяет центробежную силу, действующую на i -е звено, порождаемую угловой скоростью в j -й кинематической паре. Матрицу $[S]$ можно представить суммой матриц:

$$[S] = \sum_{k=1}^n [s_{ij}^k], \quad s_{ij}^k = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2} \right), \quad i, j = (1, \dots, n).$$

Матрицы $[s_{ij}^k]$, оставаясь квадратными матрицами размерности $n \times n$, не являются симметричными. Элементы матриц $[s_{ij}^k]$ будут обращаться в нуль при условии

$$s_{ij}^k = 0 \quad \text{при } i > k \text{ или } j > k, \text{ так как в этом случае } \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = 0 \left(\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2} = 0 \right). \quad (1.103)$$

1.3.3.3 Матрица K

Матричный коэффициент K определяет связь действующих на звенья сил и моментов со скоростями изменения обобщённых координат. Элемент матрицы k_{ij} определяет кориолисову силу, действующую на i -е звено, возникающую в результате сложного относительного (переносного) движения двух звеньев, не совпадающих с i -м. Матрицу $[K]$ также можно представить суммой матриц:

$$[K(q)] = \sum_{k=1}^n [k_{ij}^k], \quad k_{ij}^k = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \right), \quad i = (1, \dots, n).$$

Матрицы $[k_{ijk}]$ являются прямоугольными матрицами размерности $n \times C_n^2$, где C_n^2 – число сочетаний из n по 2. При вычислении матриц $[k_{ij}^k]$ необходимо иметь в виду, что

$$k_{ij}^k = 0 \quad \text{при } i > k \text{ или } j > k, \text{ так как } \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} = 0. \quad (1.104)$$

Таким образом, при $k=1$ матрицу $[k_{ij}^k]$ можно не составлять, так как все элементы этой матрицы равны нулю.

1.3.3.4 Матрица C_s

Матричный коэффициент C_s определяет связь действующих на звенья сил и моментов со скоростями изменения обобщённых координат. Элемент матрицы c_{ij} определяет при $i=j$ центробежную силу, действующую на s -е звено, порождаемую угловой скоростью в j -й кинематической паре. При $i \neq j$ c_{ij} определяет кориолисову силу, действующую на s -е звено, возникающую в результате сложного относительного (переносного) движения звеньев i и j . Матрица $[C_s]$ является симметрической матрицей размерности $n \times n$ и может быть представлена суммой:

$$[C_s^{(n \times n)}(q)] = \sum_{k=1}^n [c_{ij}^{sk}], \quad c_{ij}^{sk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \right), \quad i, j = (1, \dots, n).$$

При вычислении матриц $[c_{ij}^{sk}]$, аналогично вычислению матриц $[s_{ij}^k]$ и $[k_{ij}^k]$, необходимо учитывать, что при $s > k$, или $i > k$, или $j > k$ элементы матриц $[c_{ij}^{sk}]$ обращаются в нуль.

1.3.4 Задачи моделирования динамики манипуляционных систем роботов

Полученные динамические модели манипуляционных систем роботов (1.94) и (1.95) могут быть использованы для решения прямой и обратной задач динамики.

Прямая задача динамики манипуляционных систем состоит в том, чтобы по заданным обобщённым силам определить обобщённые координаты и скорости путём интегрирования уравнений движения, представляющих собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

Обратная задача динамики манипуляционных систем состоит в том, чтобы по заданным обобщённым координатам, скоростям и ускорениям определить обобщённые силы, действующие на звенья манипуляционной системы.

Обобщённые силы, входящие в уравнения движения, обычно зависят от обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени:

$$Q_i = Q_i(q, \dot{q}, t). \quad (1.105)$$

Чтобы при решении прямой задачи динамики однозначно определить закон движения манипуляционной системы, необходимо задать значения обобщённых координат и обобщённых скоростей в начальный момент времени t_0 :

$$q_i(t_0), \dot{q}_i(t_0), i = (1, \dots, n). \quad (1.106)$$

В математических моделях, включающих модели приводов и передаточных механизмов, обобщённые силы зависят дополнительно от переменных, описывающих явления немеханической природы. При этом число неизвестных в такой математической модели, равно сумме числа обобщённых координат и числа дополнительных переменных. Для однозначного определения закона движения манипуляционной системы в этом случае кроме (1.106) необходимо задать начальные значения ($t=t_0$) дополнительных переменных [68].

Отметим, также, что в представленных динамических моделях не учитывается влияние сил трения в кинематических парах. Причина этого в использовании уравнения Лагранжа второго рода, которое основано на предположении об идеальности связей, наложенных на движение системы, т.е. об отсутствии трения в кинематических парах. Косвенно учесть силы трения в кинематических парах можно, если в представленных математических моделях силы трения моделировать как внешние силы. Тогда в правой части уравнений (1.94) и (1.95) появится обобщённая сила, соответствующая силам трения.

При анализе механизмов с трением в общем случае целесообразно составлять уравнения движения каждого из звеньев манипуляционной системы, напри-

мер, уравнения кинестатики. Такой анализ необходим, когда силы трения существенно влияют на динамику манипуляционной системы.

Отметим, что многие методы моделирования динамики манипуляционных систем не позволяют получить динамические модели в виде (1.94) и (1.95). Так, в некоторых случаях [31] модель получается в виде

$$M(q,t)\ddot{q} + h(q,\dot{q},t) = Q_i. \quad (1.107)$$

Здесь обобщённые координаты и их производные входят неявно. Некоторые методы [31, 103] позволяют решать только обратную задачу динамики, т.е. позволяют получить динамическую модель в виде

$$Q_i = Q_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), \quad (1.108)$$

где все переменные входят не явно.

В методике моделирования динамики манипуляционных роботов, разработанной в ИПМех РАН [98] и основывающейся на методе малого параметра, задача динамики сформулирована с позиций теории управления систем. Так, прямая задача динамики формулируется как задача динамического управления, которой соответствует задание закона изменения управляющих сил $Q_D=Q_D(t)$, по которому требуется определить движение системы. Обратная задача формулируется как задача кинематического управления, которой соответствует точное выполнение приводом заданного кинематического закона движения $q=q(t)$, независимо от нагрузки.

Уравнения (1.95) и (1.96) позволяют решать прямую и обратную задачи динамики. При этом прямая задача решается численными методами. Кроме того, уравнение (1.96) позволяет проанализировать влияние сил инерции на усилия развиваемые приводами.

1.4 Методы кинематического и динамического управления манипуляционными роботами

1.4.1 Кинематическое управление манипуляционными роботами

Как было показано, на основе геометрической модели, представляющих собой множество матриц (4×4) преобразования однородных координат (1.5), могут быть составлены алгоритмы решения основных задач кинематики, прямой задачи и обратной, которые формулируются на основе, так называемой, функции положения (1.12)

$$r^{(0)} = A_{0,k}(q)r^{(k)},$$

где $r^{(k)} = [x^{(k)} \ y^{(k)} \ z^{(k)} \ 1]^T$ – радиус-вектор, определяющий локальные координаты точки, заданные в системе координат S_k , связанной с k -м звеном; $r^{(0)} = [x^{(0)} \ y^{(0)} \ z^{(0)} \ 1]^T = [\{X\}^T \ 1]^T$ – радиус-вектор, определяющий инерциальные координаты точки, заданные в неподвижной системе координат S_0 .

Решение уравнения, определяемого функцией положения, при заданном векторе обобщённых координат q соответствует решению прямой задачи кинематики.

Продифференцируем функцию положения, составленную для ТСР – характерной точки конечного звена.

$$\frac{dr^{(0)}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{0,n}}{\partial q_i} r^{(n)} \frac{dq_i}{dt} \quad \text{или} \quad [J]\{\dot{q}\} = \{\dot{X}\} \rightarrow \{\dot{q}\} = [J]^{-1}\{\dot{X}\},$$

где $[J]$ – матрицы Якоби $(3 \times n)$. Уравнение (4) представляет собой постановку обратной задачи кинематики по скоростям.

Обобщение рассмотренного подхода позволяет сформулировать концепцию построения кинематического управления манипуляционными роботами, которая может быть проиллюстрирована последовательностью: **объект управления – манипуляционный робот** \rightarrow **геометрическая модель** \rightarrow **моделирование кинематики** \rightarrow **К-управление**.

Алгоритм кинематического К-управления строится на основе двухпараметрической функции, задающей закон регулирования.

$$\left\{ \dot{\tilde{X}} \right\} = [K_0] \int_0^t (\{X^0\} - \{X\}) dt - [K_1] \{X\}, \quad \left\{ \dot{\tilde{q}} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \dot{\tilde{X}} \right\}, \quad \{\tilde{q}\} = \int_0^t \left\{ \dot{\tilde{q}} \right\} dt, \quad (1.109)$$

где $[K_0] = \text{diag} \{k_{0s}\}$, $[K_1] = \text{diag} \{k_{1s}\}$ – диагональные матрицы коэффициентов k_{0s} , k_{1s} , $s=1, \dots, n$, $\{X^0\}$ – координаты заданной точки. Структурная схема алгоритма управления (1.109) представлена на рис. 1.13. Предполагается, что управление приводами замкнуто по положению.

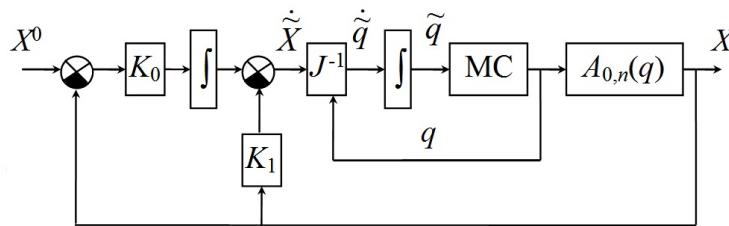


Рис. 1.13. Структурная схема К-управления

Структура алгоритма управления (1.109) получена из условия устранения рассогласования по положению манипуляционной системы, выполняемого в соответствии с решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для этого необходимо подобрать соответствующие значения коэффициентов усиления k_{0s} , k_{1s} , $s=1, \dots, n$, путём моделирования кинематики манипуляционной системы, выполняемого на основе её геометрической модели.

1.4.2 Динамическое управление манипуляционными роботами

Моделирование динамики манипуляционных систем роботов в данной работе основывается на методе Лагранжа-Эйлера, который позволяет составить динамическую модель на основе уравнения движения манипуляционных систем, в которых звенья рассматриваются как системы тел с наложенными на них связями. В качестве рабочей модели будем использовать основную динамическую модель манипуляционных систем (1.94).

$$[M_s]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_s]\{\dot{q}\} = Q_s, \quad s=(1, \dots, n),$$

$$[M_s^{(1 \times n)}(q)] = [m_j^s], \quad m_j^s = \sum_{k=1}^{j \neq s} m_j^{sk}, \quad m_j^s = m_s^s = \sum_{k=1}^{j=s} m_j^{sk} + J_s i_s^2, \quad m_j^{sk} = tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right);$$

$$[C_s^{(n \times n)}(q)] = \sum_{k=1}^n [c_{ij}^{sk}], \quad c_{ij}^{sk} = tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \right), \quad i, j=(1, \dots, n).$$

где $\{\dot{q}\}$, $\{\ddot{q}\}$ – векторы $(n \times 1)$ первых и вторых производных обобщённых (шарнирных) координат, H_k – матрица (4×4) инерции k -го звена, $k=(1, \dots, n)$, J_s – момент инерции ротора и редуктора s -го звена, приведенные к оси s -й кинематической пары, i_s – передаточное отношение редуктора s -го звена.

Путём декомпозиции каждое звено манипуляционной системы может быть представлено в виде совокупности простых или заранее определённых геометрических тел с равномерно распределённой массой (рис. 1.11 и 1.12).

Используемые для моделирования геометрические тела (детали) предварительно помещаются в банк (реляционную базу данных). Предложенная структура банка допускает его дальнейшее расширение включением новых моделей, как простейших геометрических форм, так и сложных, составленных из других моделей.

Множество матриц инерции звеньев (1.63 и 1.64), составляющих манипуляционную систему, позволяет ввести в рассмотрение новое понятие – инерционная модель.

$$H_{k,j} = A c_{k,j} H c_{k,j}^T, \quad H_k = \sum_{j=1}^{n_k} H_{k,j},$$

где $H_{k,j}$ матрица инерции j -го тела, в системе координат $S_k=(O_k, X_k, Y_k, Z_k)$, связанной с моделируемым звеном, $H c_{k,j}$ матрица инерции j -го тела в центральной системе координат тела $S^{(k)}_j=(C_j, X_{k,j}, Y_{k,j}, Z_{k,j})$, C_j – центр масс j -го тела, $A c_{k,j}: S^{(k)}_j \rightarrow S_k$, n_k – число тел моделирующих k -е звено.

Для завершения динамической модели необходимо сформировать правую часть полученных уравнений движения. Для этого была разработана методика моделирования сил, действующих на звенья манипуляционной системы, с приве-

дением этих сил к обобщённому виду. Например, математическая модель внешних сил, действующих на звенья манипуляционной системы, приведенных к главному вектору и главному моменту, имеет вид (1.80)

$$Q_{Fs} = \sum_{k=s}^n \text{tr} \left(F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_s} + F_{Mk,s} A_{0,s}^T \right),$$

где F_{Rk} и $F_{Mk,s}$ – соответственно матрицы внешних сил и моментов, заданных своими главными векторами.

Результирующая величина обобщённой силы определяется суммированием обобщённых сил соответствующих всем силам и моментам, действующим на звенья манипуляционной системы робота

$$Q_s = Q_{Fs} + Q_{Gs} + Q_{Ds}, \quad (1.110)$$

где Q_{Gs} – обобщённые силы от сил тяжести звеньев Q_{Ds} – усилия, развиваемые приводами.

Полная динамическая модель манипуляционного робота помимо уравнений движения (1.94) должна включать динамические модели приводов, обеспечивающих движение звеньев манипуляционной системы, и передаточные функции их редукторов.

$$\tau \dot{D}_s + D_s = f_s(\omega_s, u_s) \rightarrow D_s(\tau_s p + 1) = f_s, \quad \bar{f}_s = \rho_s u_s - \beta_s \omega_s, \quad (1.111)$$

$$Q_{Ds} = i_s D_s, \quad \omega_s = i_s q_s, \quad s = 1, \dots, n, \quad (1.112)$$

где D_s – момент на валу двигателя, ω_s – угловая скорость вращения вала двигателя, u_s – электрическое напряжение, управляющий параметр, τ_s – электромагнитная постоянная двигателя, p – оператор дифференцирования, f_s – статическая характеристика электродвигателя, ρ_s, β_s – коэффициенты линеаризованной модели, i_s – передаточное отношение редуктора.

Методы моделирования динамики могут быть положены в основу построения алгоритмов динамического управления. Разработанный подход можно представить последовательностью: *объект управления – манипуляционный робот* → *геометрическая модель* + *инерционная модель* + *модель внешней нагрузки* +

динамические модели приводов = полная динамическая модель → моделирование динамики → Д-управление.

Алгоритм динамического Д-управления может быть построен на основе закона регулирования заданного положения манипуляционной системы по ускорению.

$$\{u\} = [\rho]^{-1} \left([\tau][K] \left(\{\ddot{\tilde{q}}\} - \{\ddot{q}\} \right) + [\beta]\{\dot{q}\} + \{\tilde{D}\} \right), \quad \{\tilde{q}\} = [\Gamma_0] \left(\{q^0\} - \{q\} \right) - [\Gamma_1]\{\dot{q}\}, \quad (1.113)$$

$$\{\tilde{D}\} = [K] \int_0^t \left(\{\ddot{\tilde{q}}\} - \{\ddot{q}\} \right) dt,$$

где $[K] = [k_{ij}]$ – матрица $(n \times n)$ коэффициентов, $[\tau] = \text{diag}\{\tau_s\}$, $[\rho] = \text{diag}\{\rho_s\}$, $[\beta] = \text{diag}\{\beta_s\}$ – диагональные матрицы постоянных времени и коэффициентов линейных моделей приводов, $[\Gamma_0] = \text{diag}\{\gamma_{0s}\}$, $[\Gamma_1] = \text{diag}\{\gamma_{1s}\}$ – диагональные матрицы коэффициентов $\gamma_{0s}, \gamma_{1s}, s=1, \dots, n$.

Структурная схема управления, соответствующая алгоритму (1.113), представлена ниже (рис. 14). Силовое взаимовлияние звеньев манипуляционной системы учитывается в этом алгоритме через подбор коэффициентов усиления контуров ускорения, составляющих элементы матрицы $[K] = [k_{ij}]$. Значения этих коэффициентов определяются на основе анализа результатов моделирования с использованием полной динамической модели манипуляционного робота, на основе которой может быть выполнено моделирование управления приводами этого робота (рис.15).

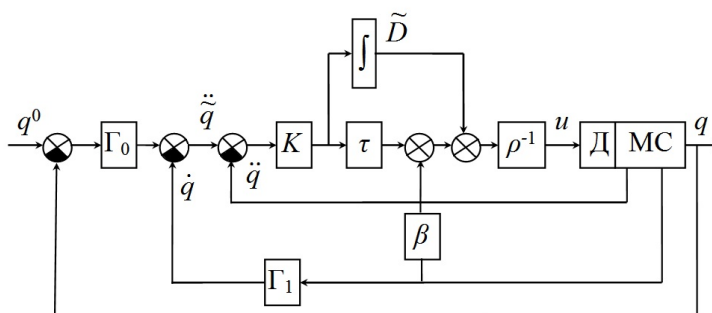


Рис. 14. Структурная схема Д-управления

Поскольку в алгоритме (1.113) используется следящий контур по ускорению, то возможен переход к диагональному виду матрицы $[K] = \text{diag}\{k_s\}$. В таком случае параметры алгоритма управлением положением манипуляционной системы

могут быть определены независимо для каждого канала $s=1, \dots, n$ на основе рассмотрения так называемой сепаратной динамической модели, для которой должны быть назначены длительности переходных процессов и допустимое перерегулирование.

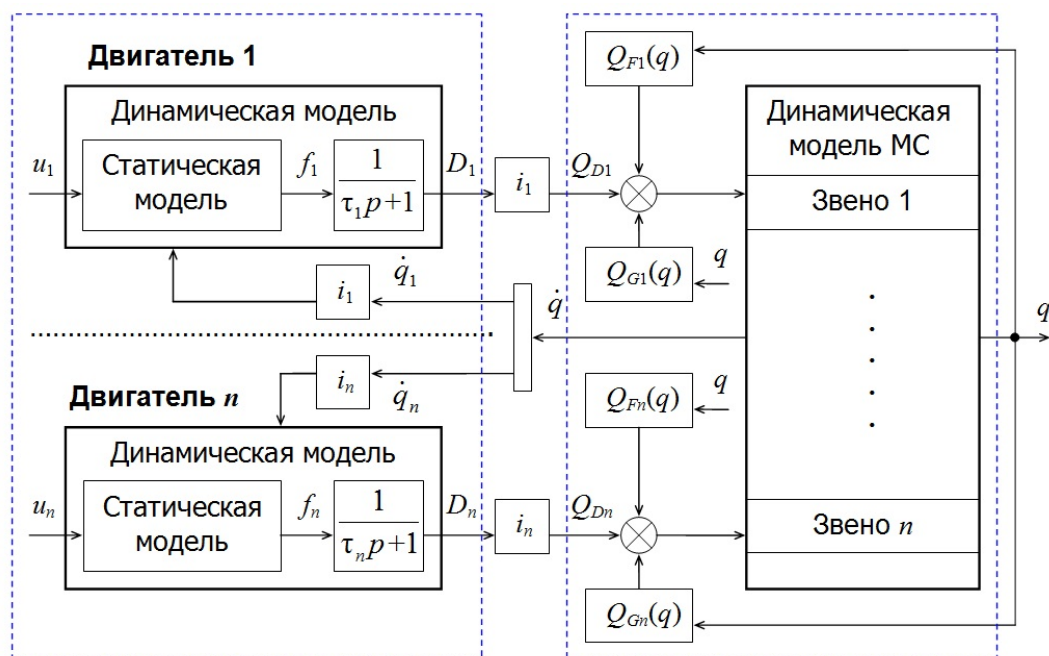


Рис. 15. Структурная схема управления приводами манипуляционного робота

1.4.3 Концепция построения модели управления манипуляционными роботами

Рассмотренные методы и задачи моделирования и управления манипуляционными роботами могут быть объединены в единую методологию. Концепция данной методологии основывается на декомпозиции математических моделей, используемых для моделирования кинематики и динамики манипуляционных систем роботов, на составные части. Каждая из таких частей-подмоделей описывает основные свойства манипуляционных роботов.

В качестве основных частей-подмоделей предложено использовать: геометрическую модель (1.5), инерционную модель (1.63 и 1.64), динамическая модель

манипуляционной системы (1.94 или 1.95), модель внешней нагрузки (1.80 или 1.82), динамические модели приводов (1.111 и 1.112).

Предложенный подход к моделированию манипуляционных систем роботов позволяет выработать концепцию построения управления манипуляционными роботами. Ниже представлена концептуальная схема построения управления манипуляционными роботами (рис. 16).

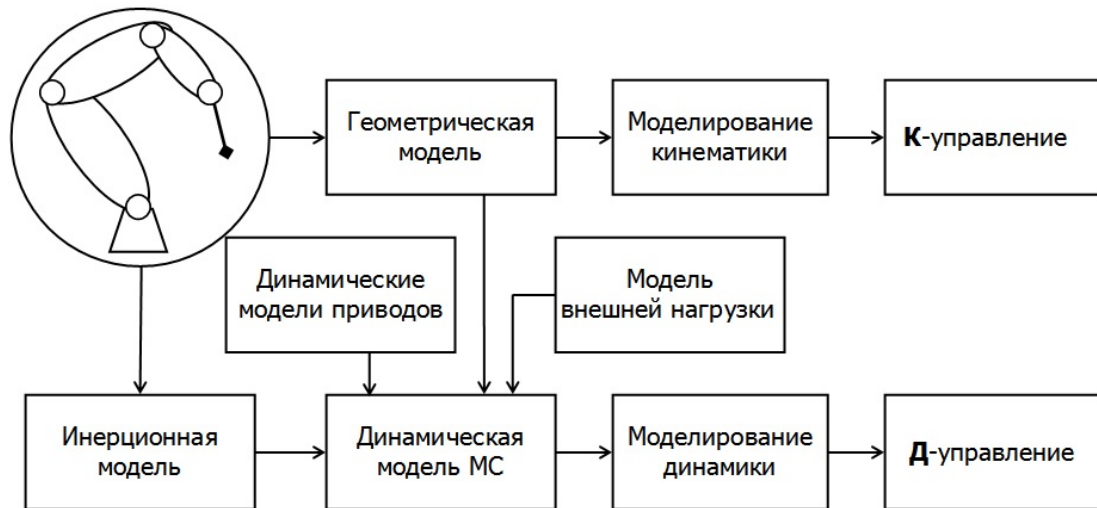


Рис. 16. Концептуальная схема построения управления

На схеме указаны основные составные части моделей управления, позволяющих составлять алгоритмы кинематического К-управления (1.109) и динамического Д-управления (1.113).

1.5 Выводы

В главе 1 последовательно рассмотрены основные задачи и методы моделирования кинематики и динамики манипуляционных систем роботов. К основным задачам относятся прямая и обратная задачи кинематики и динамики. Результаты, полученные на основе решения этих задач, соответствуют номинальным (идеальным) манипуляционным системам роботов, в конструкции которых отсутствуют дефекты, а звенья собраны из неупругих деталей, моделируемых абсолютно твёрдыми телами. Такие решения называют программными, так как на их основе задаются траектории движения и определяются, обеспечивающие заданное (про-

граммное) движение, законы изменения шарнирных (обобщённых) координат и усилий, развиваемых приводами.

Для описания геометрии манипуляционных систем роботов введено новое понятие – геометрическая модель, отличающееся от аналогичного, традиционно используемого в теории моделирования сложных систем, тем, что расширяет это понятие от простого геометрического подобия объекта-заместителя (чертёж, рисунок, фотография) до математического описания этих объектов. Таким образом, геометрическая модель, как понятие, используемое в контексте рассматриваемой методологии моделирования, представляет собой математическую модель, описывающую преобразования координат внутри и вне манипуляционных систем роботов, позволяющую аналитическим способом создавать их геометрические образы, в том числе и 3D-модели.

Поскольку манипуляционные системы представляют собой разомкнутые кинематические цепи, состоящие из звеньев, образующих между собой кинематические пары пятого класса, и каждое звено кинематической цепи, кроме последнего, входит в две кинематические пары, было решено, с каждым звеном связать две системы координат, поместив их начала в центры кинематических пар. На этом основан метод двух связываемых систем координат, положенный в основу создания геометрических моделей манипуляционных систем роботов. Данный метод принципиально отличается от метода Денавита-Хартенберга (Denavit-Hartenberg) [6], традиционно используемого для этих целей в теоретической робототехнике.

Представленная методика построения геометрической (математической) модели, позволяет определять относительные положения связываемых с манипуляционной системой робота систем координат и заданной неподвижной системой координат. В методике описано соответствие между связываемыми системами координат и системами координат, традиционно используемыми в робототехнике, такими как BASE, WORLD, FLANGE и TOOL.

Метод двух связанных систем координат, положенный в основу методики построения геометрических моделей манипуляционных систем роботов, и ис-

пользование аппарата матриц (4×4) преобразования однородных координат для его математического описания, позволяют в геометрической модели методом декомпозиции выделить две части. Одна часть зависит только от геометрических (конструктивных) параметров манипуляционной системы и поэтому остаётся неизменной в процессе её движения. Другая часть, зависит от положения манипуляционной системы в пространстве, определяемом значениями обобщённых (шарнирных) координат, поэтому эта часть геометрической модели изменяется в процессе движения манипуляционной системы.

Такое разделение геометрической модели на части позволяет в дальнейшем в математических моделях, построенных на её основе для моделирования движения манипуляционных систем, выполнять операцию дифференцирования только над изменяющейся частью, а в неизменяющейся части учитывать первичные геометрические отклонения (угловые и линейные) звеньев, вызванные неточностью изготовления и сборки составляющих их деталей.

Геометрическая модель по существу представляет собой множество матриц преобразования однородных координат, с использованием которых могут быть составлены функциональные зависимости (функции положения), отражающие связь обобщённых (шарнирных) координат с декартовыми координатами. На основе этих функций были разработаны методы и алгоритмы решения прямой и обратной задач кинематики, обобщение которых позволяет сформулировать методологическую концепцию моделирования кинематики манипуляционных систем роботов. Данная концепция может быть проиллюстрирована последовательностью: манипуляционная система \rightarrow геометрическая модель \rightarrow моделирование кинематики (К-моделирование).

Моделирование динамики манипуляционных систем роботов основывается в данной работе на методе Лагранжа-Эйлера, который позволяет на основе уравнения Лагранжа второго рода получить уравнения движения манипуляционных систем, рассматриваемых как системы тел с наложенными на них связями. Использование в данном методе матриц преобразования однородных координат поз-

воляет в выражении кинетической энергии отдельного звена выделить матрицу (4×4) инерции этого звена.

Объединение матриц инерции звеньев, составляющих манипуляционную систему, формирует множество, которое позволяет ввести в рассмотрение новое понятие – инерционная модель.

Путём декомпозиции каждое звено манипуляционной системы может быть представлено в виде совокупности простых или заранее определённых геометрических тел с равномерно распределённой массой. Используемые для моделирования геометрические тела (детали) предварительно помещаются в банк (реляционную базу данных) инерционных моделей. Предложенная структура банка допускает его дальнейшее расширение включением новых моделей, как простейших геометрических форм, так и сложных, составленных из других моделей.

Разработано несколько динамических моделей, представляющих собой разные формы уравнений движения (уравнений Лагранжа) манипуляционных систем. На основе полученных динамических моделей могут быть решены как прямая, так и обратная задача динамики.

Разработана методологическая концепция моделирования динамики манипуляционных систем роботов. Данная концепция может быть описана последовательностью действий, выполняемых при моделировании: объект исследования – манипуляционная система \rightarrow геометрическая модель + инерционная модель + модель внешней нагрузки \rightarrow моделирование динамики (Д-моделирование).

Разработанный подход к моделированию манипуляционных систем роботов позволяет выработать единую концепцию построения управления манипуляционными роботами. В рамках данной концепции могут быть реализованы алгоритмы кинематического (К-управление) и динамического (Д-управление) управления.

2 Моделирование отклонений в манипуляционных системах роботов

2.1 Моделирование неизменяющихся геометрических отклонений в манипуляционных системах роботов

2.1.1 Моделирование первичных геометрических отклонений

2.1.1.1 Первичные геометрические отклонения

При изготовлении и сборке деталей и узлов, составляющих звенья многозвенных механизмов, неизбежны отклонения их геометрических размеров и формы. Такие отклонения принято называть первичными [20]. В процессе длительной эксплуатации механизмов первичные геометрические отклонения могут изменяться, однако в процессе выполнения заданного движения они остаются неизменными. Не изменяются в процессе движения и геометрические отклонения, связанные с температурой окружающей среды.

Учесть первичные отклонения звеньев в геометрических моделях многозвенных механизмов, рассматриваемых как манипуляционные системы, можно при составлении матриц (1.1), отражающих преобразования однородных координат между связываемыми с каждым звеном системами координат (см. п. 1.1.3).

При использовании двух систем координат S_i и S_{i^*} , $i=(1, \dots, n)$, связываемых с центрами шарниров каждого звена (см. рис. 1.5), относительное положение этих систем координат для номинальной модели может быть определено матрицей преобразования однородных координат, имеющей вид

$$A_{i,i^*} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{xx}^{(i)} & \cos \varphi_{xy}^{(i)} & \cos \varphi_{xz}^{(i)} & l_x^{(i)} \\ \cos \varphi_{yx}^{(i)} & \cos \varphi_{yy}^{(i)} & \cos \varphi_{yz}^{(i)} & l_y^{(i)} \\ \cos \varphi_{zx}^{(i)} & \cos \varphi_{zy}^{(i)} & \cos \varphi_{zz}^{(i)} & l_z^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где $\cos \varphi_{xx}^{(i)} = \cos(X_i, X_{i^*})$ и т.д. – косинусы углов между соответствующими осями систем координат $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ и $S_{i^*}(X_{i^*}, Y_{i^*}, Z_{i^*})$; $l_x^{(i)}, l_y^{(i)}, l_z^{(i)}$ – координаты начала системы S_{i^*} в системе S_i .

В исходном положении конфигурация манипуляционной системы задаётся углами $\varphi^{(i)}$ между соответствующими осями систем координат S_i и S_{i^*} . Данные углы не меняются в процессе движения манипуляционной системы и зависят только от её исходного (начального) положения.

Первичные отклонения геометрических размеров звеньев манипуляционной системы (рис. 2.1) могут быть учтены введением линейных отклонений по соответствующим осям координат: $-\delta_x^{(i)}, \delta_y^{(i)}, \delta_z^{(i)}$, а первичные отклонения формы звеньев и перекосы в шарнирах – введением угловых отклонений между соответствующими осями координат: $\alpha_{xx}^{(i)}, \alpha_{xy}^{(i)}, \alpha_{xz}^{(i)}, \alpha_{yx}^{(i)}, \alpha_{yy}^{(i)}, \alpha_{yz}^{(i)}, \alpha_{zx}^{(i)}, \alpha_{zy}^{(i)}, \alpha_{zz}^{(i)}$ (рис. 2.2).

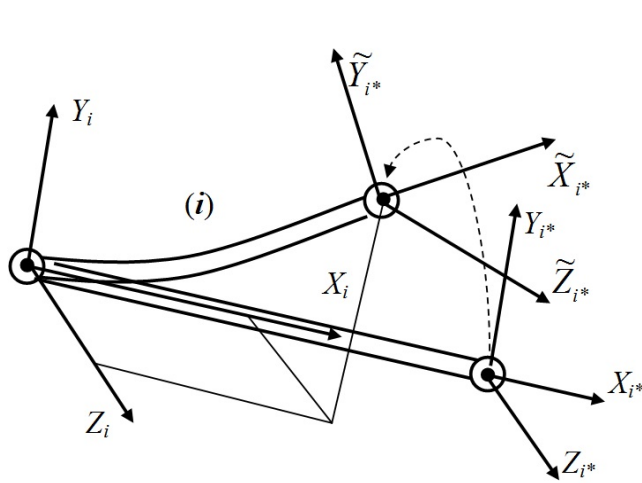


Рис. 2.1. Первичные отклонения звена

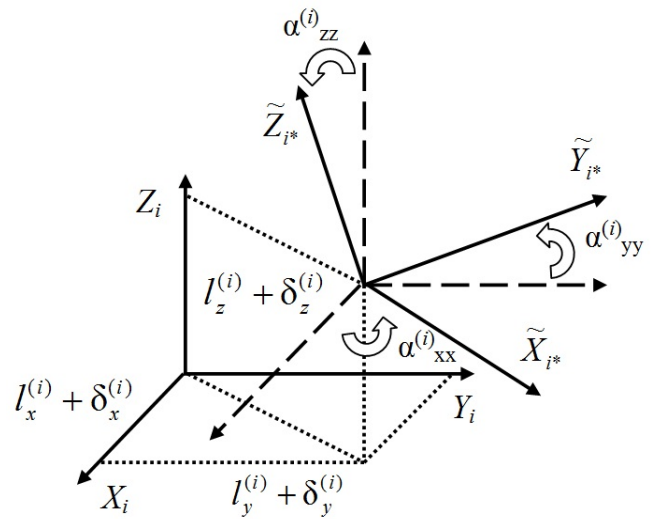


Рис. 2.2. Линейные и угловые отклонения

Углы $\alpha^{(i)}$ аналогичны углам $\varphi^{(i)}$, однако в отличие от них содержат первичные отклонения формы звеньев и перекосы в шарнирах.

2.1.1.2 Модель первичных отклонений

Матрица A_{i,i^*} , отражающая преобразование однородных координат из системы координат S_{i^*} в систему координат S_i с учётом первичных линейных и уг-

ловых отклонений звеньев, будет представлять математическую модель, учитывающую первичные отклонения, или модель первичных отклонений:

$$\tilde{A}_{i,i^*} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{xx}^{(i)}) & \cos(\alpha_{xy}^{(i)}) & \cos(\alpha_{xz}^{(i)}) & l_x^{(i)} + \delta_x^{(i)} \\ \cos(\alpha_{yx}^{(i)}) & \cos(\alpha_{yy}^{(i)}) & \cos(\alpha_{yz}^{(i)}) & l_y^{(i)} + \delta_y^{(i)} \\ \cos(\alpha_{zx}^{(i)}) & \cos(\alpha_{zy}^{(i)}) & \cos(\alpha_{zz}^{(i)}) & l_z^{(i)} + \delta_z^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & \tilde{L}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Знак волны над матрицами в выражении (2.2) означает, что матрицы содержат первичные геометрические отклонения.

Введенные линейные отклонения отражают отклонения геометрических размеров звеньев, приводящие к смещению шарниров. Так, $\delta_x^{(i)}$ определяет смещение по оси X_i в системе координат S_i начала системы координат \tilde{S}_{i^*} . Напомню, что начало системы координат S_i связывается с центром шарнира, соединяющего i -е и $(i-1)$ -е звенья, а начало системы координат S_{i^*} связывается с центром шарнира, соединяющего i -е и $(i+1)$ -е звенья. Аналогично $\delta_y^{(i)}$ и $\delta_z^{(i)}$ определяют соответствующие смещения по осям Y_i и Z_i .

Введенные угловые отклонения определяют углы между направлениями соответствующих осей систем координат S_i и S_{i^*} , связанных со звеном. Так, угол $\alpha_{xx}^{(i)}$ это угол между направлением оси \tilde{X}_{i^*} и направлением оси X_i , $\alpha_{xy}^{(i)}$ – угол между направлением оси \tilde{X}_{i^*} и направлением оси Y_i . Аналогично определяются и другие углы, содержащие угловые отклонения.

Угловые отклонения в матрице (2.2) учитывают первоначальную конфигурацию манипуляционной системы и отклонения формы звеньев, а также перекосы и зазоры, имеющиеся внутри шарниров. К отклонениям от теоретической геометрической формы относятся, например, отклонения, от плоскостности, прямолинейности, биение цилиндрических поверхностей, отклонения профиля резьбы или зубьев.

Для учёта температурного влияния, предложенная математическая модель, может быть дополнена функциями, учитывающими геометрические отклонения звеньев, связанные с изменением их формы и линейных размеров при изменении температуры окружающей среды.

При составлении матрицы (2.2) необязательно предварительно определять все 9 угловых отклонений непосредственным их измерением (прямое измерение). Достаточно определить 3 из них, например два угла, образованные осью \tilde{X}_{i^*} с осями X_i и Y_i , и угол, образованный \tilde{Z}_{i^*} с осью Z_i . Остальные 6 угловых отклонений могут быть вычислены решением системы шести нелинейных уравнений (косвенное измерение), отражающих ортонормированность векторов, составляющих, как столбцы, так и строки матрицы поворота \tilde{R}_i .

2.1.1.3 Отклонения позиционирования

Помимо первичных отклонений звеньев, связанных в основном с отклонениями их геометрических размеров и формы, существенное влияние на точность многозвенных механических систем оказывают отклонения позиционирования, связанные с отклонениями обобщённых (шарнирных) координат.

В манипуляционных системах отклонения позиционирования могут быть представлены как приращения обобщённых координат: $q_{ид} = q_{ин} + \Delta q_i$, где $q_{ид}$ — действительное значение i -й обобщённой координаты, а $q_{ин}$ — её программное (заданное) значение. В дальнейшем, в обозначении программных значений обобщённых координат символ «п» указываться не будет (рис. 2.3).

С учётом отклонения позиционирования матрица преобразования однородных координат $A_{(i-1)^*,i}$, определяющая положение системы координат S_i относительно системы $S_{(i-1)^*}$ [см. (1.2)], будет иметь вид

$$\tilde{A}_{(i-1)^*,i} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i(q_i + \Delta q_i)) & -\sin(\beta_i(q_i + \Delta q_i)) & 0 & 0 \\ \sin(\beta_i(q_i + \Delta q_i)) & \cos(\beta_i(q_i + \Delta q_i)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1 - \beta_i)(q_i + \Delta q_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{если кинематическая пара вращательная;} \\ 0 & \text{если поступательная.} \end{cases}$$

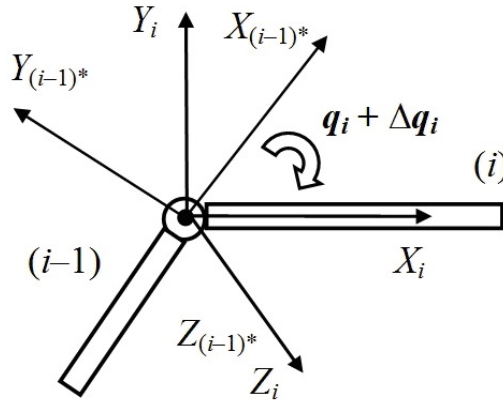


Рис. 2.3. Отклонение позиционирования

Отклонения позиционирования могут иметь различную природу. Ощутимый вклад в эти отклонения вносят зазоры в передаточных механизмах, а также упругая податливость некоторых элементов этих механизмов.

Матричные выражения (2.2) и (2.3) представляют собой геометрическую модель манипуляционной системы, параметризованную на основе первичных геометрических отклонений в её звеньях и отклонений позиционирования, возникающих в соединяющих их шарнирах. Эти отклонения определяются на конкретном образце путем проведения измерений современными метрологическими методами.

2.1.2 Модификация геометрических моделей

2.1.2.1 Модифицированная модель

В математической модели (2.2) введенные угловые отклонения $\alpha^{(i)}$ суммарно учитывают исходную конфигурацию манипуляционной системы и первоначальные отклонения формы звеньев. Модифицируем эту математическую модель, разделив углы $\varphi^{(i)}$, определяемые исходным положением манипуляционной системы,

и углы $\gamma^{(i)}$, отражающие первичные отклонения формы звеньев и перекосы в шарнирах.

На рис. 2.4 представлены углы $\varphi^{(i)}$ и угловые отклонения $\gamma^{(i)}$, соответствующие модифицированной математической модели, имеющей вид

$$\tilde{A}_{i,i^*} = A_{i,i^*}(\varphi, l, \delta) A_{i^*,\tilde{i}^*}(\gamma), \quad (2.4)$$

$$\tilde{A}_{i,i^*} = \begin{bmatrix} R_i(\varphi) & L_i(l, \delta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{A}_{i,i^*} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{xx}^{(i)} & \cos\varphi_{xy}^{(i)} & \cos\varphi_{xz}^{(i)} & l_x^{(i)} + \delta_x^{(i)} \\ \cos\varphi_{yx}^{(i)} & \cos\varphi_{yy}^{(i)} & \cos\varphi_{yz}^{(i)} & l_y^{(i)} + \delta_y^{(i)} \\ \cos\varphi_{zx}^{(i)} & \cos\varphi_{zy}^{(i)} & \cos\varphi_{zz}^{(i)} & l_z^{(i)} + \delta_z^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma_{xx}^{(i)} & \cos\gamma_{xy}^{(i)} & \cos\gamma_{xz}^{(i)} & 0 \\ \cos\gamma_{yx}^{(i)} & \cos\gamma_{yy}^{(i)} & \cos\gamma_{yz}^{(i)} & 0 \\ \cos\gamma_{zx}^{(i)} & \cos\gamma_{zy}^{(i)} & \cos\gamma_{zz}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

В математической модели (2.4–2.6) угловые отклонения $\gamma^{(i)}$ должны быть измерены относительно осей системы координат S_{i^*} , соответствующей номинальной геометрической модели, построенной по данным конструкторской документации. Эти оси отмечены на рис. 2.4 пунктирной линией вида — —.

Однако из-за отклонения формы реального звена и перекосов в шарнире, соединяющем данное звено с последующим звеном, положение осей системы координат S_{i^*} не имеет привязки к поверхностям измеряемых деталей. Поэтому измерение данных углов может иметь значительные метрологические сложности.

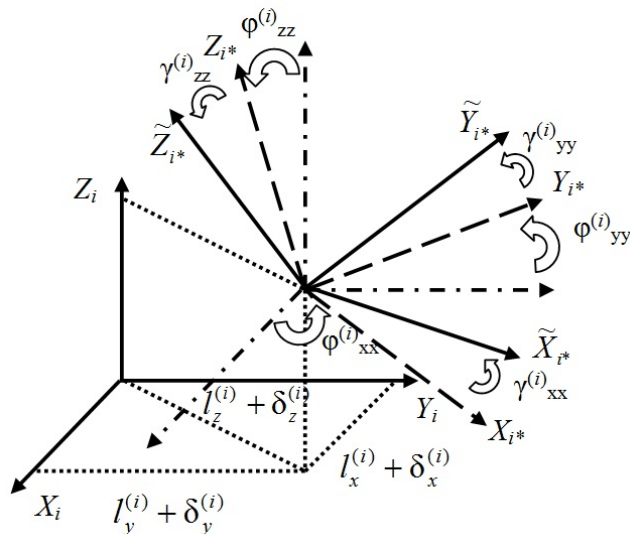


Рис. 2.4. Линейные и угловые отклонения в модифицированной модели

2.1.2.2 Альтернативная модель

Используя модифицированную модель первичных отклонений (2.4), можно получить альтернативную модель, в которой будут разделены параметры, соответствующие номинальной и реальной моделям. Для этого введём радиус-вектор ρ , обеспечивающий параллельный перенос системы координат S_{i^*} , соответствующей номинальной геометрической модели, в систему $S_{i\#}$. Угловые отклонения $\gamma^{(i)}$ должны быть измерены относительно осей системы координат $S_{i\#}$. На рис. 2.5 введенный радиус-вектор ρ представлен своими проекциями в системе координат S_{i^*} , а оси системы координат $S_{i\#}$ отмечены пунктирной линией вида \cdots .

$$\tilde{A}_{i,j^*} = A_{i,j^*}(\varphi, l) A_{i^*,i\#}(\gamma, \rho), \quad (2.7)$$

$$\tilde{A}_{i,j^*} = \begin{bmatrix} R_i(\varphi) & L_i(l) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i(\gamma) & L_i(\rho) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{A}_{i,j^*} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{xx}^{(i)}) & \cos(\varphi_{xy}^{(i)}) & \cos(\varphi_{xz}^{(i)}) & l_x^{(i)} \\ \cos(\varphi_{yx}^{(i)}) & \cos(\varphi_{yy}^{(i)}) & \cos(\varphi_{yz}^{(i)}) & l_y^{(i)} \\ \cos(\varphi_{zx}^{(i)}) & \cos(\varphi_{zy}^{(i)}) & \cos(\varphi_{zz}^{(i)}) & l_z^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{xx}^{(i)}) & \cos(\gamma_{xy}^{(i)}) & \cos(\gamma_{xz}^{(i)}) & \rho_x^{(i)} \\ \cos(\gamma_{yx}^{(i)}) & \cos(\gamma_{yy}^{(i)}) & \cos(\gamma_{yz}^{(i)}) & \rho_y^{(i)} \\ \cos(\gamma_{zx}^{(i)}) & \cos(\gamma_{zy}^{(i)}) & \cos(\gamma_{zz}^{(i)}) & \rho_z^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

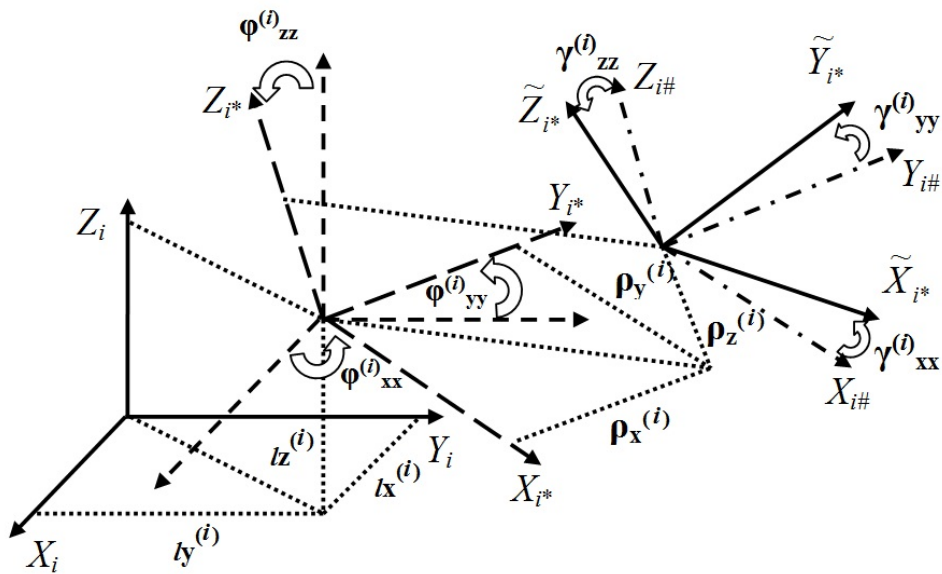


Рис. 2.5. Линейные и угловые отклонения в альтернативной модели

Линейные отклонения $\rho^{(i)}$, использованные в математической модели (2.7–2.9), связаны с ранее введенными линейными отклонениями $\delta^{(i)}$ соотношениями

$$\begin{aligned}\rho_x^{(i)} \cos(\varphi_{xx}^{(i)}) + \rho_y^{(i)} \cos(\varphi_{xy}^{(i)}) + \rho_z^{(i)} \cos(\varphi_{xz}^{(i)}) &= \delta_x^{(i)}, \\ \rho_x^{(i)} \cos(\varphi_{yx}^{(i)}) + \rho_y^{(i)} \cos(\varphi_{yy}^{(i)}) + \rho_z^{(i)} \cos(\varphi_{yz}^{(i)}) &= \delta_y^{(i)}, \\ \rho_x^{(i)} \cos(\varphi_{zx}^{(i)}) + \rho_y^{(i)} \cos(\varphi_{zy}^{(i)}) + \rho_z^{(i)} \cos(\varphi_{zz}^{(i)}) &= \delta_z^{(i)}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Метрологические сложности, связанные с измерением угловых отклонений $\gamma^{(i)}$, были отмечены ранее при описании модифицированной модели первичных отклонений. К этому следует добавить необходимость вычисления (косвенное измерение) отклонений $\rho^{(i)}$ на основе измеренных отклонений $\delta^{(i)}$ путём решения системы нелинейных уравнений (2.10). Проведение прямых измерений отклонений $\rho^{(i)}$ является более сложной метрологической задачей, чем измерение $\delta^{(i)}$.

При составлении матрицы \tilde{A}_{i,j^*} , определяющей математическую модель (2.7), так же как и при составлении матриц (2.2) и (2.4), необходимо определить непосредственным измерением только 3 угловых отклонения. Уравнения для расчёта остальных 6 угловых отклонений можно получить на основе свойства ортонормированности векторов, составляющих столбцы и строки матрицы поворота $\tilde{R}_i(\gamma)$. Например, для этого можно использовать систему из 6 независимых уравнений

$$\begin{aligned}\cos^2(\gamma_{xx}^{(i)}) + \cos^2(\gamma_{xy}^{(i)}) + \cos^2(\gamma_{xz}^{(i)}) &= 1; \\ \cos^2(\gamma_{yx}^{(i)}) + \cos^2(\gamma_{yy}^{(i)}) + \cos^2(\gamma_{yz}^{(i)}) &= 1; \\ \cos^2(\gamma_{zx}^{(i)}) + \cos^2(\gamma_{zy}^{(i)}) + \cos^2(\gamma_{zz}^{(i)}) &= 1;\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\cos(\gamma_{xx}^{(i)}) \cos(\gamma_{xz}^{(i)}) + \cos(\gamma_{yx}^{(i)}) \cos(\gamma_{yz}^{(i)}) + \cos(\gamma_{zx}^{(i)}) \cos(\gamma_{zz}^{(i)}) &= 0; \\ \cos(\gamma_{xx}^{(i)}) \cos(\gamma_{xz}^{(i)}) + \cos(\gamma_{yx}^{(i)}) \cos(\gamma_{yz}^{(i)}) + \cos(\gamma_{zx}^{(i)}) \cos(\gamma_{zz}^{(i)}) &= 0; \\ \cos(\gamma_{xy}^{(i)}) \cos(\gamma_{xz}^{(i)}) + \cos(\gamma_{yy}^{(i)}) \cos(\gamma_{yz}^{(i)}) + \cos(\gamma_{zy}^{(i)}) \cos(\gamma_{zz}^{(i)}) &= 0.\end{aligned}$$

Для решения систем линейных (2.10) и нелинейных (2.11) уравнений необходимо использовать численные методы, позволяющие получить корни с требуемой точностью.

2.1.3 Метод коррекции интегральных отклонений

2.1.3.1 Интегральные отклонения

Предложенные математические модели (2.2)–(2.11), учитывающие первичные геометрические отклонения звеньев в манипуляционных системах, могут быть использованы для определения интегральных отклонений положения звеньев, возникающих из-за накопления ошибок положения каждого предыдущего звена кинематической цепи.

Под интегральными отклонениями манипуляционных систем следует понимать отклонения траекторий движения характерных точек их звеньев и отклонения ориентации звеньев от заданной, вызванные наличием первичных геометрических отклонений и отклонений позиционирования, определённых ранее.

Положение любой точки в пространстве можно определить радиус-вектором этой точки в неподвижной системе координат. В многозвенных механических системах, имеющих последовательную структуру, радиус-вектор r точки начала системы координат S_n конечного звена в неподвижной системе координат S_0 может быть задан выражением $r = A_{0,n}r_o, r_o = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

С учётом первичных геометрических отклонений интегральное отклонение траектории $\Delta r(q)$ можно задать выражением, представляющим разность между действительным положением, определяемым радиус-вектором \tilde{r} , и программным положением, определяемым радиус-вектором r (рис. 2.6).

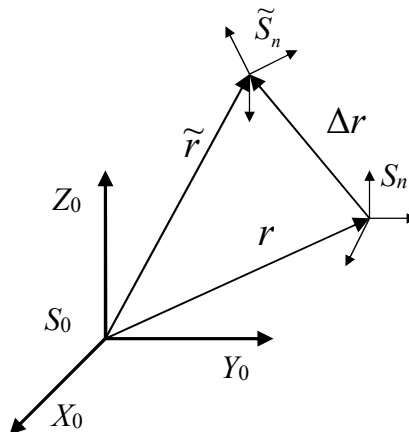


Рис. 2.6. Интегральное отклонение

$$\Delta r = \tilde{r} - r, \quad \tilde{r} = \tilde{A}_{0,n} r_o,$$

$$\Delta r(q) = (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) r_o = \begin{Bmatrix} i_0^T (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) r_o \\ j_0^T (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) r_o \\ k_0^T (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) r_o \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$i_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad j_0^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad k_0^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

Аналогично может быть определено интегральное отклонение, связанное с ориентацией, задаваемое вектором $\Delta e(q)$

$$\Delta e(q) = \begin{Bmatrix} i_0^T (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) j_n \\ i_0^T (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) k_n \\ j_0^T (\tilde{A}_{0,n} - A_{0,n}) k_n \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$j_n = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \quad k_n = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T.$$

Совместно интегральные отклонения положения могут быть определены комбинированным вектором $[\Delta r, \Delta e]^T$.

Необходимо отметить, что матрицы $\tilde{A}_{0,n}$, используемые в выражениях (2.12) и (2.13) получены при $k=n$ на основе выражений

$$\tilde{A}_{(i-1),(i-1)^*} = A_{(i-1),(i-1)^*} A_{(i-1)^*,(\tilde{i}-1)^*}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{A}_{(i-1),i} = \tilde{A}_{(i-1),(i-1)^*} \tilde{A}_{(i-1)^*,i}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{A}_{0,k} = \prod_{i=1}^k \tilde{A}_{(i-1),i}, \quad (2.16)$$

где модифицирующая матрица $A_{(i-1)^*,(\tilde{i}-1)^*}$ аналогична матрице A_{i^*,\tilde{i}^*} .

Таким образом, траектория движения рабочего органа реального промышленного робота будет отличаться от заданной программной траектории на величину интегральных отклонений положения конечного звена (рис. 2.7).

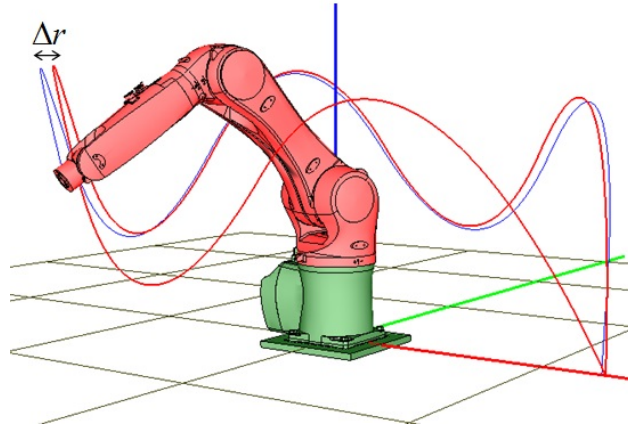


Рис. 2.7. Отклонение траектории движения робота

2.1.3.2 Метод коррекции

Следует иметь в виду, что законы движения промышленных роботов в форме законов изменения обобщённых координат $q(t)$ их исполнительных механизмов, разрабатываются для конкретных моделей этого оборудования. Поэтому возникает вопрос об использовании разработанных ранее программ управления движением различных моделей промышленных роботов с возможностью компенсации интегральных отклонений движения конкретного образца, обусловленных его индивидуальными отклонениями геометрических размеров и формы.

Для получения законов движения исполнительных механизмов, соответствующих конкретным образцам оборудования, предложен метод коррекции интегральных отклонений движения. Метод основывается на разработанных математических моделях (2.2)–(2.11). Использование номинальных $A_{0,n}$ и модифицированных $\tilde{A}_{0,n}$ геометрических моделей в выражениях (2.12) и (2.13) позволяет записать условие коррекции интегральных отклонений в форме

$$\begin{cases} \Delta r(q) \\ \Delta e(q) \end{cases} = 0 \rightarrow \tilde{q}. \quad (2.17)$$

Решение системы нелинейных уравнений (2.17) даёт необходимые законы движения по заданной программной траектории конкретного образца промышленного робота (рис. 2.8).

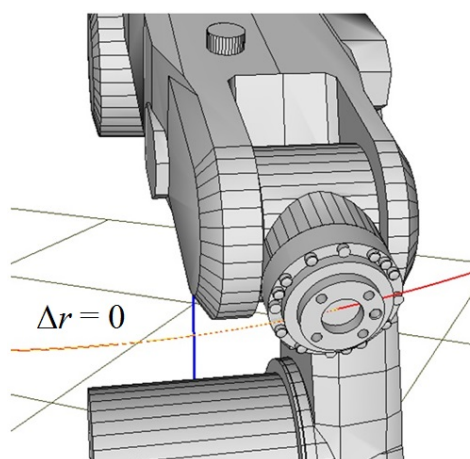


Рис. 2.8. Коррекция интегральных отклонений

Использование математического обеспечения, реализующего представленный метод коррекции, в системах автоматического управления промышленных роботов позволит повысить их кинематическую точность.

Разработанные математические модели помимо первичных геометрических отклонений учитывают также отклонения, вызванных дефектами звеньев, полученными в процессе эксплуатации исполнительных механизмов промышленных роботов.

2.2 Методы диагностирования кинематической структуры манипуляционных систем роботов

Промышленные роботы представляют собой многозвенные механические системы с последовательной структурой, звенья которых образуют друг с другом кинематические пары пятого класса и моделируются твёрдыми телами. Такие механические системы в данной работе именуется манипуляционными системами. Пример манипуляционной системы промышленного робота *KUKA KR6 AGILUS*, имеющего шесть степеней подвижности, представлен (рис. 2.9).

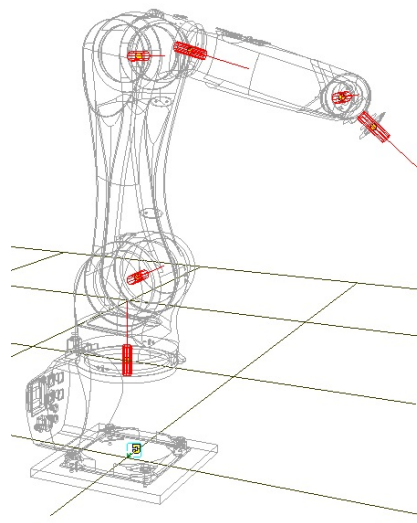


Рис. 2.9. Манипуляционная система промышленного робота *KUKA KR6 AGILUS*

На рис. 2.9 изображены контуры звеньев и шарниры с указанием осей относительного вращения соединяемых ими звеньев. К последнему звену манипуляционной системы промышленного робота может быть жестко присоединён инструмент. Для этого в конструкции последнего звена предусматривается соединительный фланец. На рисунке соединительный фланец изображен в форме диска, внутри которого помещен шарнир, ось вращения которого перпендикулярна плоскости диска.

Комплекс мероприятий по оснащению робота новым инструментом предусматривает проведение диагностирования кинематической структуры манипуляционных систем роботов с использованием процедуры калибровки этого инстру-

мента перед его использованием в работе. Это необходимо для того, чтобы система управления промышленного робота могла правильно выполнять перемещение нового инструмента в рабочем пространстве робота. Для этого математические модели, описывающие преобразования координат в данной модели робота, должны быть дополнены математической моделью, сформированной для установленного инструмента.

Математические модели, описывающие преобразования координат для инструмента, создаются системой управления автоматически при выполнении процедуры калибровки инструмента перед вводом нового инструмента в эксплуатацию. Созданные математические модели сохраняются в постоянной памяти контроллера системы управления в библиотеке инструмента с указанием логического имени, присвоенного данному инструменту.

В последующем при программировании движения промышленного робота системе управления указывается устанавливаемый на работе инструмент путём присвоения специальному параметру логического имени выбранного инструмента.

Для описания относительного движения звеньев манипуляционных систем используют математические модели, обеспечивающие преобразование координат между системами координат, связываемыми с каждым звеном и системой координат, связываемой с неподвижным основанием.

В п. 1.1.1 Моделирование кинематики манипуляционных систем роботов рассмотрена методика построения геометрической модели манипуляционных систем роботов, основывающаяся на выражении (1.5)

$$A_{0,k} = A_{0,1}A_{1,2}\dots A_{(i-1),i}\dots A_{(k-1),k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $A_{(i-1),i}$ – матрица размерности 4×4 , выполняющая преобразование однородных координат из системы S_i , связанной с i -м звеном, в систему $S_{(i-1)}$, связанную с $(i-1)$ -м; $A_{0,k}$ – матрица размерности 4×4 , выполняющая преобразование однородных координат из системы S_k , связанной с k -м звеном, в систему S_0 , связан-

ную с неподвижным основанием; n – количество звеньев в манипуляционной системе робота.

Структура матрицы преобразования однородных координат $A_{0,k}$ имеет вид (1.6)

$$A_{0,k}^{4 \times 4} = \begin{bmatrix} & 3 \times 3 & & 3 \times 1 \\ & R_{0,k} & & \bar{r}_{0k}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $R_{0,k}$ – матрица поворота, имеющая размерность 3×3 и содержащая косинусы углов между соответствующими осями систем координат S_0 и S_k ; $\bar{r}_{0k}^{(0)} = (x_{0k}^{(0)} \quad y_{0k}^{(0)} \quad z_{0k}^{(0)})$ – радиус-вектор точки 0_k , являющейся началом системы S_k , проведенный из начала системы S_0 .

Для произвольной точки M , выбранной на k -м звене (рис. 1.8), матрицы преобразования однородных координат позволяют получить простую форму выражения, реализующего эти преобразования, именуемую функцией положения манипуляционной системы (1.7)

$$r_M^{(0)} = A_{0,k} r_M^{(k)},$$

где $r_M^{(0)} = [x_M^{(0)} \quad y_M^{(0)} \quad z_M^{(0)} \quad 1]^T$ – расширенный радиус-вектор точки M в неподвижной системе S_0 , $r_M^{(k)} = [x_M^{(k)} \quad y_M^{(k)} \quad z_M^{(k)} \quad 1]^T$ – расширенный радиус-вектор точки M в связанной системе S_k .

Функция положения выполняет отображение координат точки из системы координат S_k в систему координат S_0 : $A_{0,k} : S_k \rightarrow S_0$ ($S_0 \leftarrow S_k$), $k=1 \dots n$, для каждого k -го звена манипуляционной системы.

В системах управления промышленных роботов неподвижную систему координат S_0 именуют *WORLD* и называют мировой системой координат. Начало системы координат S_n , связанную с конечным звеном, помещают в центр установочного фланца, а ось Z_n этой системы координат направляют перпендикулярно плоскости фланца вдоль оси его вращения. Систему координат S_n именуют *FLANGE*. Точку, соответствующую центру инструмента, обозначают 0_{n*} и именуют *TCP* (*TCP* – *Tool Center Point*). Система координат $S_{n*} \equiv \text{TOOL}$ с началом в

точке $0_{n^*} \equiv TCP$, связывается с инструментом, присоединяемым к фланцу. Система координат $S_B \equiv BASE$ задаётся в окружающем пространстве и считается жестко связанной с системой координат $WORLD$ (рис. 1.9).

Разработаны математические модели для систем управления, реализующие различные методы калибровки промышленных роботов, объединённые в две основные группы:

1) калибровка инструмента: $A_{0,n^*} = A_{0,n} A_{n,n^*} : S_0 \leftarrow S_n \leftarrow S_{n^*}$;

2) калибровка базы: $A_{B,n^*} = A_{B,0} A_{0,n^*} : S_B \leftarrow S_0 \leftarrow S_{n^*}$.

2.2.1 Калибровка центра инструмента

Процедура калибровки инструмента выполняется в два этапа. Первый этап состоит в определении центра инструмента (TCP). Второй этап включает действия по определению ориентации прямоугольной системы координат, связываемой с инструментом, начало которой помещается в TCP . В данном разделе проводятся исследования первого этапа калибровки инструмента, а именно разработке математических моделей систем управления промышленных роботов, предназначенных для калибровки центра инструмента (TCP).

2.2.1.1 Прямой ввод локальных координат TCP

По данному методу калибровки в систему управления вводят значения $(x_{0_{n^*}}^{(n)} \quad y_{0_{n^*}}^{(n)} \quad z_{0_{n^*}}^{(n)})$, являющиеся координатами точки $0_{n^*} \equiv TCP$ в системе координат S_n . Задача может быть решена двумя способами (рис. 2.10).

Первый способ основывается на данных, полученных из конструкторской документации, в частности из 3D-модели калибруемого инструмента.

Второй способ является метрологическим и основывается на прямых измерениях. Поскольку при установке инструмента точка центра установочного фланца, являющаяся началом системы координат $FLANGE$, оказывается закрытой и недоступной для прямого измерения, то измеряются координаты

$(x_{0n^*}^{(0)} \quad y_{0n^*}^{(0)} \quad z_{0n^*}^{(0)})$, являющиеся координатами точки $0_{n^*} \equiv TCP$ в неподвижной системе координат $S_0 \equiv WORLD$. Искомые координаты могут быть получены вычислением на основе математической модели полученной преобразованием функции положения (1.7), составленной для точки $0_{n^*} \equiv TCP$, случая $k=n$.

$$r_{0n^*}^{(n)} = A_{0,n}^{-1} r_{0n^*}^{(0)}. \quad (2.18)$$

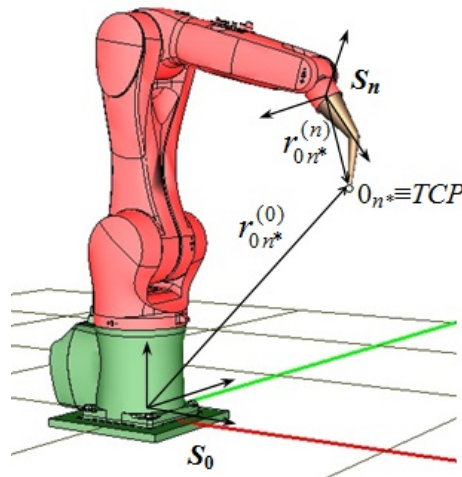


Рис. 2.10. Системы координат $S_0 \equiv WORLD$, $S_n \equiv FLANGE$ и точка $0_{n^*} \equiv TCP$.

2.2.1.2 Калибровка базовым инструментом

Данный метод позволяет выполнить калибровку нового инструмента на основе использования другого уже откалиброванного (базового) инструмента.

Последовательность действий:

1. На установочном фланце закрепляется ранее откалиброванный базовый инструмент.
2. Системе управления промышленного робота указывается логическое имя базового инструмента. Выполняется ввод данных о TCP базового инструмента.
3. TCP базового инструмента подводится к заостренному наконечнику, закреплённому в рабочем пространстве робота и в памяти контроллера системы управления сохраняются данные соответствующие значениям шарнирных координат.

4. Базовый инструмент отводится от наконечника и снимается. Устанавливается новый инструмент.

5. TCP нового инструмента подводится к тому же наконечнику и в памяти контроллера системы управления сохраняются данные соответствующие новым значениям шарнирных координат.

6. Выполняется расчёт данных для TCP нового инструмента. Данные сохраняются с указанием логического имени нового инструмента.

Математическая модель, обеспечивающая расчет данных для TCP нового инструмента по методу калибровки базовым инструментом может быть получена на основе рассмотрения уравнений, полученных на основе функции положения (1.7), для случаев подвода к заостренному наконечнику TCP базового и нового инструментов (рис. 2.10).

Для базового инструмента в точке контакта его TCP с закрепленным наконечником может быть составлено уравнение

$$r_{0n^*}^{(0)} = {}^{(1)}A_{0,n} {}^{(1)}r_{0n^*}^{(n)}. \quad (2.19)$$

Для нового инструмента в точке контакта его TCP с закрепленным наконечником может быть составлено уравнение

$$r_{0n^*}^{(0)} = {}^{(2)}A_{0,n} {}^{(2)}r_{0n^*}^{(n)}. \quad (2.20)$$

Левые части уравнений (2.19) и (2.20) равны, так как представляют радиус-вектор одной и той же точки (острия наконечника) в неподвижной системе координат $S_0 \equiv WORLD$, следовательно, равны и правые части этих уравнений

$${}^{(1)}A_{0,n} {}^{(1)}r_{0n^*}^{(n)} = {}^{(2)}A_{0,n} {}^{(2)}r_{0n^*}^{(n)}. \quad (2.21)$$

Окончательно математическая модель для калибровки центра инструмента промышленных роботов по методу калибровки базовым инструментом будет иметь вид

$${}^{(2)}r_{0n^*}^{(n)} = {}^{(2)}A_{0,n}^{-1} {}^{(1)}A_{0,n} {}^{(1)}r_{0n^*}^{(n)}, \quad (2.22)$$

где ${}^{(2)}r_{0n^*}^{(n)} = [x_{0n^*}^{(n)} \quad y_{0n^*}^{(n)} \quad z_{0n^*}^{(n)} \quad 1]^T$ – расширенный радиус-вектор, содержащий координаты TCP нового инструмента в системе координат $S_n \equiv FLANGE$.

2.2.1.3 Метод двух подходов

По методу двух подходов TCP калибруемого инструмента дважды подводится к закреплённому наконечнику с разных сторон.

Последовательность действий:

1. На установочном фланце закрепляется калибруемый инструмент.
2. TCP калибруемого инструмента подводится к заостренному наконечнику, закреплённому в рабочем пространстве робота и в памяти контроллера системы управления сохраняются значения шарнирных координат соответствующих данному положению манипуляционной системы робота.
3. Инструмент отводится и снова поводится к наконечнику с другого направления. Сохраняются значения шарнирных координат, соответствующих новому положению манипуляционной системы робота.
4. Выполняется расчёт данных для TCP калибруемого инструмента. Данные сохраняются с указанием логического имени инструмента.

Математическая модель, обеспечивающая расчет данных для TCP калибруемого инструмента по методу двух подходов может быть получена на основе рассмотрения уравнений, полученных на основе (1.7), для двух случаев подвода TCP калибруемого инструмента к закреплённому наконечнику.

Для первого подхода

$$r_{0n^*}^{(0)} = {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)}. \quad (2.23)$$

Для второго подхода

$$r_{0n^*}^{(0)} = {}^{(2)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)}. \quad (2.24)$$

Разность уравнений (2.23) и (2.24) имеет вид

$$\left({}^{(2)}A_{0,n} - {}^{(1)}A_{0,n} \right) r_{0n^*}^{(n)} = 0, \quad (2.25)$$

$${}^{(i)}A_{0,n} = \begin{bmatrix} {}^{(i)}a_{11} & {}^{(i)}a_{12} & {}^{(i)}a_{13} & {}^{(i)}x_{0n}^{(0)} \\ {}^{(i)}a_{21} & {}^{(i)}a_{22} & {}^{(i)}a_{23} & {}^{(i)}y_{0n}^{(0)} \\ {}^{(i)}a_{31} & {}^{(i)}a_{32} & {}^{(i)}a_{33} & {}^{(i)}z_{0n}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (2.26)$$

Окончательно математическая модель для калибровки центра инструмента промышленных роботов по методу двух подходов будет иметь вид

$$\begin{aligned} \left({}^{(2)}a_{11} - {}^{(1)}a_{11} \right) x_{0n^*}^{(n)} + \left({}^{(2)}a_{12} - {}^{(1)}a_{12} \right) y_{0n^*}^{(n)} + \left({}^{(2)}a_{13} - {}^{(1)}a_{13} \right) z_{0n^*}^{(n)} &= {}^{(1)}x_{0n}^{(0)} - {}^{(2)}x_{0n}^{(0)}, \\ \left({}^{(2)}a_{21} - {}^{(1)}a_{21} \right) x_{0n^*}^{(n)} + \left({}^{(2)}a_{22} - {}^{(1)}a_{22} \right) y_{0n^*}^{(n)} + \left({}^{(2)}a_{23} - {}^{(1)}a_{23} \right) z_{0n^*}^{(n)} &= {}^{(1)}y_{0n}^{(0)} - {}^{(2)}y_{0n}^{(0)}, \\ \left({}^{(2)}a_{31} - {}^{(1)}a_{31} \right) x_{0n^*}^{(n)} + \left({}^{(2)}a_{32} - {}^{(1)}a_{32} \right) y_{0n^*}^{(n)} + \left({}^{(2)}a_{33} - {}^{(1)}a_{33} \right) z_{0n^*}^{(n)} &= {}^{(1)}z_{0n}^{(0)} - {}^{(2)}z_{0n}^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Система уравнений (2.27) представляет собой математическую модель для калибровки центра инструмента промышленных роботов по методу двух подходов. Координаты *TCP* калибруемого инструмента в системе координат $S_n \equiv FLANGE$ могут быть определены численно, например, одним из методов решения систем линейных уравнений.

Метод двух подходов может быть повторён несколько раз, а полученные результаты усреднены. Это позволит снизить влияние ошибки, связанной с неточностью позиционирования *TCP* калибруемого инструмента на закреплённом наконечнике.

2.2.2 Калибровка ориентации инструмента

Процедура калибровки инструмента выполняется в два этапа. Первый этап состоит в определении точки центра инструмента (*TCP – Tool Center Point*). Второй этап включает действия по определению ориентации прямоугольной системы координат, связываемой с инструментом, начало которой помещается в *TCP*. В данном разделе проведено исследование второго завершающего этапа калибровки

инструмента, а именно разработке математических моделей систем управления промышленных роботов, предназначенных для калибровки нового инструмента.

При калибровке ориентации инструмента должна быть сформирована математическая модель, отражающая ориентацию системы координат $TOOL$ по отношению к системе координат $FLANGE$. Сформированная математическая модель дополнит существующую в системе управления математическую модель, отражающую ориентацию системы координат $FLANGE$ по отношению к системе координат $WORLD$ (рис. 2.11).

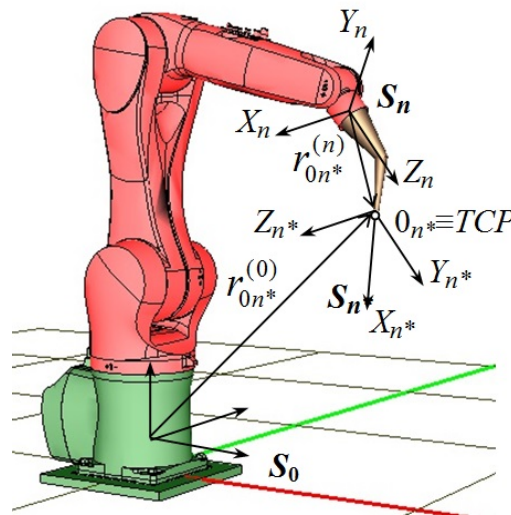


Рис. 2.11. Системы координат $S_0 \equiv WORLD$, $S_n \equiv FLANGE$, $S_n^* \equiv TOOL$ и точка $0_n^* \equiv TCP$.

Было разработано несколько методов калибровки ориентации нового инструмента, основывающихся на данных предварительной калибровки его TCP .

2.2.2.1 Метод параллельных осей

Оси системы координат $S_n^* \equiv TOOL$ направляются параллельно осям системы координат $S_0 \equiv WORLD$, при этом продольную ось инструмента X_n^* направляют противоположно вертикальной оси Z_0 , а оси Y_n^* и Z_n^* по направлениям, совпадающим с осями Y_0 и X_0 , соответственно.

Данному условию параллельности осей систем координат S_0 и S_n^* соответствует вид матрицы поворота R_{0, n^*}

$$R_{0,n^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Связь относительной ориентации осей систем координат S_0 , S_n и S_{n^*} может быть описана уравнением

$$R_{0,n^*} = R_{0,n} R_{n,n^*}. \quad (2.29)$$

Из уравнения (2.29) получаем искомое выражение

$$R_{n,n^*} = R_{0,n}^{-1} R_{0,n^*}. \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) представляет собой математическую модель, позволяющую определить ориентацию системы координат $S_{n^*} \equiv TOOL$ относительно системы координат $S_n \equiv FLANGE$ по методу параллельных осей.

2.2.2.2 Метод калибровки ориентации по трём точкам

Использование данного метода предполагает, что предварительно выполнена калибровка точки центра инструмента (TCP), которую принимают за начало системы координат $TOOL$, связываемую с калибруемым инструментом.

Калибруемый инструмент закрепляется на установочном фланце робота. В системе управления выбирается, сохранённое при калибровке TCP , логическое имя инструмента и выполняются действия, реализующие данный метод.

Последовательность действий:

1. TCP калибруемого инструмента подводится к закреплённому в рабочем пространстве робота заострённому наконечнику. Сохраняются данные о положении робота.
2. TCP перемещается в положительном направлении вдоль продольной оси инструмента X_{n^*} и фиксируется. Сохраняются данные о новом положении инструмента.
3. Калибруемый инструмент перемещается, так чтобы вершина заостренного наконечника оказалась в плоскости $X_{n^*}Y_{n^*}$, в той части, которая соответствует положительному направлению оси Y_{n^*} . Вычисляются и сохраняются данные об ориентации инструмента.

Математическая модель, отражающая ориентацию системы координат *TOOL* по отношению к системе координат *FLANGE*, может быть получена на основе выражения (1.7).

В соответствии с приведенной последовательностью действий, реализующей данный метод калибровки, при подводе *TCP* калибруемого инструмента к заостренному наконечнику для каждого шага этой последовательности будем иметь:

Шаг 1.

$$r_{\Delta}^{(0)} = {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)}, \quad (2.31)$$

где $r_{\Delta}^{(0)}$ – радиус-вектор вершины заостренного наконечника, закреплённого в рабочем пространстве робота; $r_{0n^*}^{(n)} = [x_{0n^*}^{(n)} \quad y_{0n^*}^{(n)} \quad z_{0n^*}^{(n)} \quad 1]^T$ – радиус-вектор, содержащий координаты *TCP* калибруемого инструмента в системе координат $S_n \equiv FLANGE$.

Шаг 2.

$$r_{\Delta}^{(0)} = {}^{(2)}A_{0,n} A_{n,n^*} r_{\Delta x}^{(n^*)}, \quad (2.32)$$

$$r_{\Delta x}^{(n^*)} = [\Delta_1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T, \quad (2.33)$$

где Δ_1 – произвольное перемещение *TCP* в положительном направлении по оси X_{n^*} , $\Delta_1 > 0$ (рис. 2.12).

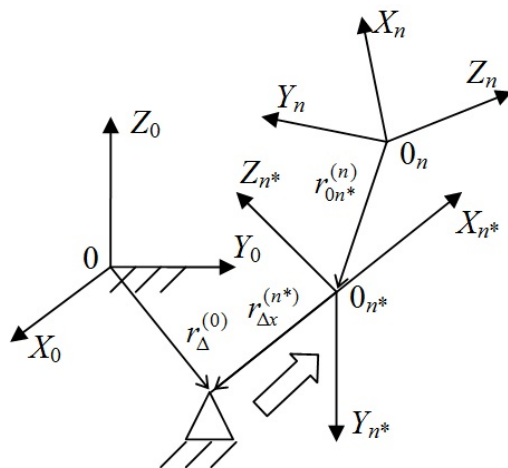


Рис. 2.12. Перемещение инструмента вдоль оси X_{n^*}

Приравняв выражения (2.31) и (2.32) получим уравнение

$${}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)} = {}^{(2)}A_{0,n} A_{n,n^*} r_{\Delta x}^{(n^*)}. \quad (2.34)$$

Преобразуем уравнение (2.34) к виду

$$A_{n,n^*} r_{\Delta x}^{(n^*)} = {}^{(2)}A_{0,n}^{-1} {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(0)} = V^{(1)}, \quad (2.35)$$

где $V^{(1)} = [v_x^{(1)} \quad v_y^{(1)} \quad v_z^{(1)} \quad 1]^T$ – вектор промежуточных вычислений.

Аналогично (1.6) структура матрицы преобразования однородных координат A_{n,n^*} имеет вид

$$A_{n,n^*} = \begin{bmatrix} & 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ & R_{n,n^*} & \bar{r}_{0n^*}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$R_{n,n^*} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

где R_{n,n^*} – матрица поворота, имеющая размерность 3×3 и содержащая косинусы углов между соответствующими осями систем координат S_n и S_{n^*} .

С учетом (2.36) и (2.37) матричное уравнение (2.35) может быть представлено системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1 c_{11} = v_x^{(1)} - x_{0n^*}^{(n)}, \\ \Delta_1 c_{21} = v_y^{(1)} - y_{0n^*}^{(n)}, \\ \Delta_1 c_{31} = v_z^{(1)} - z_{0n^*}^{(n)}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Неизвестными подлежащими определению являются коэффициенты c_{11} , c_{21} и c_{31} представляющие косинусы углов между осями X_n и X_{n^*} , Y_n и X_{n^*} , Z_n и X_{n^*} – соответственно. Для их определения систему трех уравнений (2.38) необходимо дополнить четвёртым нелинейным уравнением, отражающим свойство базисных векторов

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1. \quad (2.39)$$

Из системы уравнений (2.38) будем иметь

$$c_{11} = \frac{v_x^{(1)} - x_{0n^*}^{(n)}}{\Delta_1}, \quad c_{21} = \frac{v_y^{(1)} - y_{0n^*}^{(n)}}{\Delta_1}, \quad c_{31} = \frac{v_z^{(1)} - z_{0n^*}^{(n)}}{\Delta_1}. \quad (2.40)$$

Подставляя (2.40) в уравнения (2.39) и учитывая, что $\Delta_1 > 0$ получим

$$\Delta_1 = -\sqrt{\left(v_x^{(1)} - x_{0n^*}^{(n)}\right)^2 + \left(v_y^{(1)} - y_{0n^*}^{(n)}\right)^2 + \left(v_z^{(1)} - z_{0n^*}^{(n)}\right)^2}. \quad (2.41)$$

Шаг 3.

При выполнении третьего шага калибровки ориентации инструмента по трем точкам возможны два варианта действий и соответственно этому две математические модели, описывающие эти варианты.

Вариант 1. Вершина заостренного наконечника помещается в плоскость $X_{n^*}Y_{n^*}$ и фиксируется на положительной части оси Y_{n^*} . Для данного случая могут быть составлены уравнения

$$r_{\Delta}^{(0)} = {}^{(3)}A_{0,n} A_{n,n^*} r_{\Delta y}^{(n*)}, \quad (2.42)$$

$$r_{\Delta y}^{(n*)} = [0 \quad \Delta_2 \quad 0 \quad 1]^T, \quad (2.43)$$

где Δ_2 – расстояние *TCP* от вершины заостренного наконечника по оси Y_{n^*} , $\Delta_2 > 0$.

Приравняв выражения (2.31) и (2.42) получим уравнение

$${}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)} = {}^{(3)}A_{0,n} A_{n,n^*} r_{\Delta y}^{(n*)}. \quad (2.44)$$

Преобразуем уравнение (2.44) к виду

$$A_{n,n^*} r_{\Delta y}^{(n*)} = {}^{(3)}A_{0,n}^{-1} {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(0)} = V^{(2)}, \quad (2.45)$$

где $V^{(2)} = [v_x^{(2)} \quad v_y^{(2)} \quad v_z^{(2)} \quad 1]^T$ – вектор промежуточных вычислений.

Основываясь на аналогии с шагом 2 можно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta_2 c_{12} = v_x^{(2)} - x_{0n^*}^{(n)}, \\ \Delta_2 c_{22} = v_y^{(2)} - y_{0n^*}^{(n)}, \\ \Delta_2 c_{32} = v_z^{(2)} - z_{0n^*}^{(n)}, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

Из системы уравнений (2.46) можно выразить

$$\Delta_2 = \sqrt{\left(v_x^{(2)} - x_{0n^*}^{(n)}\right)^2 + \left(v_y^{(2)} - y_{0n^*}^{(n)}\right)^2 + \left(v_z^{(2)} - z_{0n^*}^{(n)}\right)^2}, \quad (2.47)$$

$$c_{12} = \frac{v_x^{(2)} - x_{0n^*}^{(n)}}{\Delta_2}, \quad c_{22} = \frac{v_y^{(2)} - y_{0n^*}^{(n)}}{\Delta_2}, \quad c_{32} = \frac{v_z^{(2)} - z_{0n^*}^{(n)}}{\Delta_2}. \quad (2.48)$$

Коэффициенты c_{12} , c_{22} и c_{32} представляют косинусы углов между осями X_n и Y_{n^*} , Y_n и Y_{n^*} , Z_n и Y_{n^*} — соответственно.

Вариант 2. Вершина заостренного наконечника помещается в плоскость $X_{n^*}Y_{n^*}$ и фиксируется на её полуплоскости, соответствующей положительной части оси Y_{n^*} (рис. 2.13). Для данного случая могут быть составлены уравнения

$$r_{\Delta}^{(0)} = {}^{(4)}A_{0,n} A_{n,n^*} r_{\Delta xy}^{(n^*)}, \quad (2.49)$$

$$r_{\Delta xy}^{(n^*)} = [\Delta_3 \quad \Delta_4 \quad 0 \quad 1]^T, \quad (2.50)$$

где Δ_3 и Δ_4 — координаты заостренного наконечника по осям X_{n^*} и Y_{n^*} соответственно; $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$.

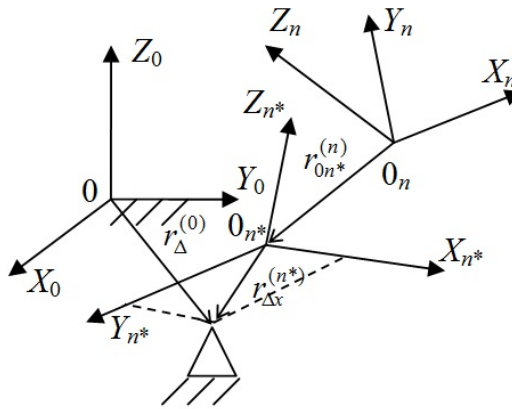


Рис. 2.13. Перемещение инструмента в плоскости $X_{n^*}Y_{n^*}$

Приравняв выражения (2.31) и (2.49) получим

$${}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)} = {}^{(4)}A_{0,n} A_{n,n^*} r_{\Delta xy}^{(n^*)}. \quad (2.51)$$

Преобразуем уравнение (2.51) к виду

$$A_{n,n^*} r_{\Delta xy}^{(n^*)} = {}^{(4)}A_{0,n}^{-1} {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)} = V^{(3)}, \quad (2.52)$$

где $V^{(3)} = [v_x^{(3)} \quad v_y^{(3)} \quad v_z^{(3)} \quad 1]^T$ — вектор промежуточных вычислений.

Система уравнений для данного случая будет иметь вид

$$\begin{cases} \Delta_3 c_{11} + \Delta_4 c_{12} = v_x^{(3)} - x_{0n^*}^{(n)}, \\ \Delta_3 c_{21} + \Delta_4 c_{22} = v_y^{(3)} - y_{0n^*}^{(n)}, \\ \Delta_3 c_{31} + \Delta_4 c_{32} = v_z^{(3)} - z_{0n^*}^{(n)}, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.53)$$

Система уравнений (2.53) дополнена уравнением, отражающим ортогональность осей X_{n^*} и Y_{n^*} .

Дополнительно к обоим вариантам выполнения шага 3 калибровки ориентации инструмента необходимо добавить систему уравнений, позволяющую определить коэффициенты c_{13} , c_{23} и c_{33} представляющие косинусы углов между осями X_n и Z_{n^*} , Y_n и Z_{n^*} , Z_n и Z_{n^*} – соответственно.

$$\begin{cases} c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\ c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.54)$$

Представленные уравнения составляют математическую модель для метода калибровки ориентации инструмента промышленных роботов по трем точкам.

2.2.3 Калибровка базы

В системах управления промышленных роботов неподвижную систему координат S_0 именуют *WORLD* и называют мировой системой координат. Начало системы координат S_n , связанную с конечным звеном, помещают в центр установочного фланца, а ось Z_n этой системы координат направляют перпендикулярно плоскости фланца вдоль оси его вращения. Систему координат S_n именуют *FLANGE*. Точку центра инструмента обозначают 0_{n^*} и именуют *TCP*. Система координат $S_{n^*} \equiv TOOL$ с началом в точке $0_{n^*} \equiv TCP$, связывается с инструментом, присоединяемым к установочному фланцу. Система координат $S_B \equiv BASE$ задаётся в окружающем пространстве и считается жестко связанной с системой координат *WORLD* (рис. 1.9).

При калибровке базы должна быть сформирована математическая модель, отражающая ориентацию системы координат *BASE* по отношению к системе координат *WORLD*. Сформированная математическая модель дополнит существующую в системе управления математическую модель, отражающую ориентацию манипуляционной системы робота по отношению к системе координат *WORLD*. Составленная таким образом математическая модель позволит описывать программируемые перемещения объекта манипулирования (инструмента, заготовки, детали и т.п.) в системе координат *BASE* (рис. 2.14).

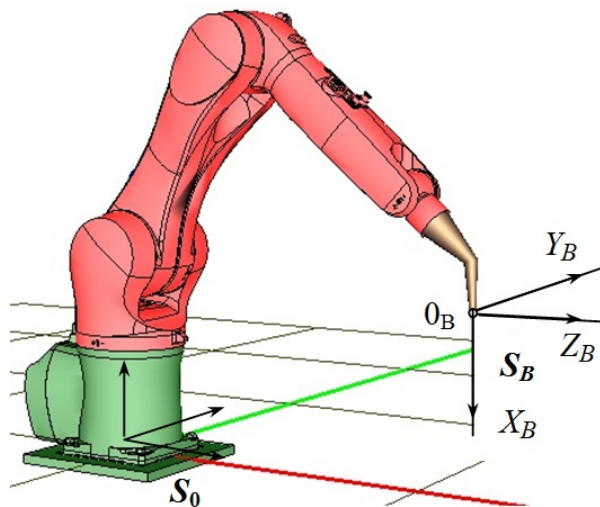


Рис. 2.14. Системы координат $S_0 \equiv WORLD$, $S_B \equiv BASE$.

Калибровка базы должна выполняться после калибровки инструмента, так как при выполнении калибровки базы точка центра инструмента (*TCP*) должна быть задана. Процедура калибровки базы подразделяется на два этапа. Первый этап состоит в определении точки 0_B являющейся началом системы координат $S_B \equiv BASE$. Второй этап состоит в определении ориентации системы координат *BASE* по отношению к системе координат *WORLD*. На практике применяют несколько методов калибровки базы.

2.2.3.1 Прямой ввод данных

По данному методу калибровки в систему управления вводят значения $(x_B^{(0)} \ y_B^{(0)} \ z_B^{(0)})$, являющиеся координатами точки 0_B начала системы координат S_B в системе координат S_0 и углы отражающие ориентацию систем координат $S_B \equiv$

$BASE$ и $S_0 \equiv WORLD$. Чаще всего в качестве таких углов используют углы Эйлера, реже углы между соответствующими осями систем координат S_B и S_0 . Способ основывается на данных, полученных из конструкторской документации, в частности из 3D-модели объекта манипулирования.

2.2.3.2 Метод калибровки базы по трём точкам

При выполнении калибровки базы по данному методу на первом этапе определяется точка начала системы координат $BASE$. На втором этапе определяется ориентация системы координат $BASE$ в системе координат $WORLD$, для этого фиксируются направления осей X_B и Y_B системы координат $BASE$.

Объект манипулирования помещается в рабочее пространство робота. В системе управления выбирается, сохранённое при калибровке TCP , логическое имя используемого для калибровки базы инструмента и выполняются действия, реализующие данный метод.

Последовательность действий:

4. TCP выбранного инструмента подводится к точке начала системы координат калибруемой базы. Сохраняются данные о положении робота.
5. TCP подводится к точке находящейся на положительной полуоси X_B системы координат $BASE$. Сохраняются данные о новом зафиксированном положении инструмента.
6. TCP перемещается в точку находящуюся на плоскости $X_B Y_B$, в той части, которая соответствует положительному направлению оси Y_B . Сохраняются данные о положении робота.

На основе сохранённых данных о положениях робота при выполнении калибровки вычисляются и сохраняются данные о положении и ориентации калибруемой базы.

Математическая модель, отражающая положение и ориентацию системы координат $BASE$ в системе координат $WORLD$, может быть получена на основе выражения (1.7).

В соответствии с приведенной последовательностью действий, реализующей данный метод калибровки, при подводе *TCP*, используемого при калибровке инструмента, к точкам калибруемой базы будем иметь:

Шаг 1.

$$r_{0n^*}^{(0)} = {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)} \equiv r_{0_B}^{(0)} = A_{0,B} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (2.55)$$

где $r_{0n^*}^{(n)} = [x_{0n^*}^{(n)} \ y_{0n^*}^{(n)} \ z_{0n^*}^{(n)} \ 1]^T$ – радиус-вектор, содержащий координаты *TCP* используемого инструмента в системе координат $S_n \equiv FLANGE$; $r_{0n^*}^{(0)}$ – радиус-вектор *TCP* в системе координат $S_0 \equiv WORLD$; $r_{0_B}^{(0)}$ – радиус-вектор начала системы координат $S_B \equiv BASE$ в системе координат S_0 (рис. 2.14).

Выражение (2.55) показывает, что координаты радиус-вектора $r_{0_B}^{(0)}$ точки 0_B совпадают на данном шаге с координатами радиус-вектора $r_{0n^*}^{(0)}$ *TCP* и находятся в четвёртом столбце матрицы $A_{0,B}$, выполняющей преобразование однородных координат из системы координат S_B в систему координат S_0 .

Шаг 2.

$$r_{\Delta x}^{(0)} = {}^{(2)}A_{0,n} r_{0n^*}^{(n)} = V^{(1)}, \quad (2.56)$$

$V^{(1)} = [v_x^{(1)} \ v_y^{(1)} \ v_z^{(1)} \ 1]^T$ – вектор промежуточных вычислений.

$$r_{\Delta x}^{(0)} = A_{0,B} r_{\Delta x}^{(B)}, \quad (2.57)$$

$$r_{\Delta x}^{(B)} = [\Delta_1 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (2.58)$$

где Δ_1 – произвольное перемещение *TCP* в положительном направлении по оси X_B , $\Delta_1 > 0$ (рис. 2.15).

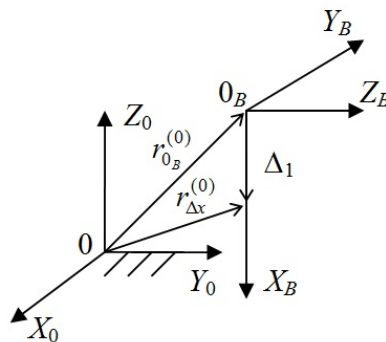


Рис. 2.15. Перемещение *TCP* вдоль оси X_B

На основе выражения (1.6), отражающего структуру матрицы преобразования однородных координат, можно записать

$$A_{0,B}^{4 \times 4} = \begin{bmatrix} & 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ & R_{0,B} & \vec{r}_{0_B}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

где $R_{0,B}=[c_{ij}]$ – матрица (3×3) поворота, содержащая косинусы углов между соответствующими осями систем координат S_0 и S_B .

Раскрывая матричное уравнение (2.57) с учетом (2.56, 2.58 и 2.59) можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1 c_{11} = v_x^{(1)} - x_{0_B}^{(0)}, \\ \Delta_1 c_{21} = v_y^{(1)} - y_{0_B}^{(0)}, \\ \Delta_1 c_{31} = v_z^{(1)} - z_{0_B}^{(0)}, \\ c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.60)$$

Из системы уравнений (2.60) можно выразить

$$\Delta_1 = \sqrt{(v_x^{(1)} - x_{0_B}^{(0)})^2 + (v_y^{(1)} - y_{0_B}^{(0)})^2 + (v_z^{(1)} - z_{0_B}^{(0)})^2}, \quad (2.61)$$

$$c_{11} = \frac{v_x^{(1)} - x_{0_B}^{(0)}}{\Delta_1}, \quad c_{21} = \frac{v_y^{(1)} - y_{0_B}^{(0)}}{\Delta_1}, \quad c_{31} = \frac{v_z^{(1)} - z_{0_B}^{(0)}}{\Delta_1}. \quad (2.62)$$

Коэффициенты c_{11} , c_{21} и c_{31} представляют косинусы углов между осями X_0 и X_B , Y_0 и X_B , Z_0 и X_B – соответственно.

Шаг 3.

При выполнении третьего шага калибровки базы по трем точкам возможны два варианта действий и соответственно этому две математические модели, описывающие эти варианты.

Вариант 1. ТСП помещается в плоскость $X_B Y_B$ и фиксируется на положительной части оси Y_B . Для данного случая могут быть составлены уравнения аналогично шагу 2

$$r_{\Delta y}^{(0)} = {}^{(3)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(2)}, \quad (2.63)$$

где $V^{(2)} = [v_x^{(2)} \quad v_y^{(2)} \quad v_z^{(2)} \quad 1]^T$ – вектор промежуточных вычислений.

$$r_{\Delta y}^{(0)} = A_{0,B} r_{\Delta y}^{(B)}, \quad (2.64)$$

$$r_{\Delta y}^{(B)} = [0 \quad \Delta_2 \quad 0 \quad 1]^T, \quad (2.65)$$

где Δ_2 – произвольное перемещение *TCP* в положительном направлении по оси Y_B , $\Delta_2 > 0$ (рис. 3).

Раскрывая матричное уравнение (2.64) с учетом (2.56, 2.58 и 2.63) можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta_2 c_{12} = v_x^{(2)} - x_{0_B}^{(n)}, \\ \Delta_2 c_{22} = v_y^{(2)} - y_{0_B}^{(n)}, \\ \Delta_2 c_{32} = v_z^{(2)} - z_{0_B}^{(n)}, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.66)$$

Из системы уравнений (2.66) можно выразить

$$\Delta_2 = \sqrt{(v_x^{(2)} - x_{0_B}^{(0)})^2 + (v_y^{(2)} - y_{0_B}^{(0)})^2 + (v_z^{(2)} - z_{0_B}^{(0)})^2}, \quad (2.67)$$

$$c_{12} = \frac{v_x^{(2)} - x_{0_B}^{(0)}}{\Delta_2}, \quad c_{22} = \frac{v_y^{(2)} - y_{0_B}^{(0)}}{\Delta_2}, \quad c_{32} = \frac{v_z^{(2)} - z_{0_B}^{(0)}}{\Delta_2}. \quad (2.68)$$

Коэффициенты c_{12} , c_{22} и c_{32} представляют косинусы углов между осями X_0 и Y_B , Y_0 и Y_B , Z_0 и Y_B – соответственно.

Вариант 2. *TCP* помещается в плоскость $X_B Y_B$ и фиксируется на её полу-плоскости, соответствующей положительной части оси Y_B (рис. 2.16).

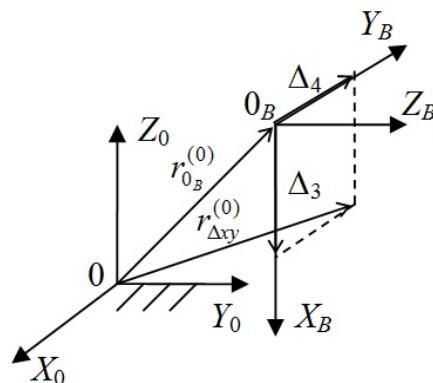


Рис. 2.16. Перемещение *TCP* в плоскости $X_B Y_B$

Для данного случая могут быть составлены уравнения

$$r_{\Delta xy}^{(0)} = {}^{(4)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(3)}, \quad (2.69)$$

где $V^{(3)} = [v_x^{(3)} \quad v_y^{(3)} \quad v_z^{(3)} \quad 1]^T$ – вектор промежуточных вычислений.

$$r_{\Delta xy}^{(0)} = A_{0,B} r_{\Delta xy}^{(B)}, \quad (2.70)$$

$$r_{\Delta xy}^{(B)} = [\Delta_3 \quad \Delta_4 \quad 0 \quad 1]^T, \quad (2.71)$$

где Δ_3 и Δ_4 – координаты *TCP* по осям X_B и Y_B соответственно; $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$.

Система уравнений для данного случая будет иметь вид

$$\begin{cases} \Delta_3 c_{11} + \Delta_4 c_{12} = v_x^{(3)} - x_{0B}^{(0)}, \\ \Delta_3 c_{21} + \Delta_4 c_{22} = v_y^{(3)} - y_{0B}^{(0)}, \\ \Delta_3 c_{31} + \Delta_4 c_{32} = v_z^{(3)} - z_{0B}^{(0)}, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.72)$$

В систему (2.72) включено уравнение отражающее ортогональность осей X_B и Y_B .

Дополнительно к обоим вариантам выполнения шага 3 калибровки базы необходимо добавить систему уравнений, позволяющую определить коэффициенты c_{13} , c_{23} и c_{33} представляющие косинусы углов между осями X_0 и Z_B , Y_0 и Z_B , Z_0 и Z_B – соответственно.

$$\begin{cases} c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\ c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.73)$$

Таким образом, окончательно сформирована матрица $A_{0,B}$, обеспечивающая преобразование однородных координат из системы координат $S_B \equiv BASE$ в систему координат $S_0 \equiv WORLD$. Для программирования движения робота в системе координат $BASE$ необходима матрица $A_{B,0}$, выполняющая обратное преобразование координат

$$A_{B,0} = A_{0,B}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{0,B}^T & -R_{0,B}^T \bar{r}_{0B}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Представленные уравнения составляют математическую модель для метода калибровки базы промышленных роботов по трем точкам.

2.2.3.3 Метод калибровки базы по двум и четырём точкам

Калибровка по двум точкам. В случае если начало системы координат $S_B \equiv BASE$ находится вне рабочего пространства робота или расположено внутри объекта манипулирования (детали или заготовки) используют метод калибровки по двум точкам базы, находящимся в рабочей зоне робота, координаты которых известны. По данному методу TCP робота подводится к двум таким точкам, в которых сохраняются данные о положениях робота. На основе сохранённых данных о положениях робота при выполнении калибровки вычисляются и сохраняются данные о положении и ориентации калибруемой базы.

Математическая модель, отражающая положение и ориентацию системы координат $BASE$ в системе координат $WORLD$, может быть получена на основе функции положения (1.7). Для двух заданных точек будем иметь (рис. 2.17)

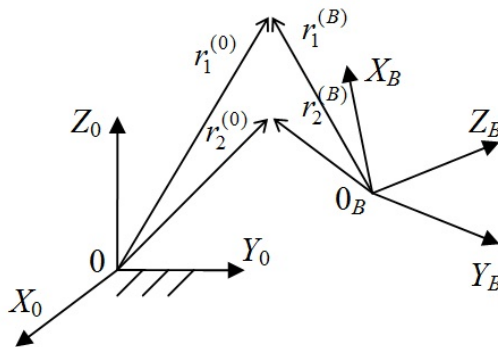


Рис. 2.17. Калибровка базы по двум заданным точкам

$$r_1^{(0)} = A_{0,B} r_1^{(B)} = {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(1)}, \quad (2.75)$$

$$r_2^{(0)} = A_{0,B} r_2^{(B)} = {}^{(2)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(2)}, \quad (2.76)$$

где $r_1^{(B)} = [x_1^{(B)} \quad y_1^{(B)} \quad z_1^{(B)} \quad 1]^T$ и $r_2^{(B)} = [x_2^{(B)} \quad y_2^{(B)} \quad z_2^{(B)} \quad 1]^T$ – радиус-векторы заданных точек; $r_{0n}^{(n)} = [x_{0n}^{(n)} \quad y_{0n}^{(n)} \quad z_{0n}^{(n)} \quad 1]^T$ – радиус-вектор, содержащий координаты TCP используемого инструмента.

Раскрывая матричные уравнения (2.75) и (2.76) с учетом (2.59) можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1^{(B)} + c_{12}y_1^{(B)} + c_{13}z_1^{(B)} + x_{0_B}^{(0)} = v_x^{(1)}, & c_{21}x_1^{(B)} + c_{22}y_1^{(B)} + c_{23}z_1^{(B)} + y_{0_B}^{(0)} = v_y^{(1)}, \\ c_{31}x_1^{(B)} + c_{32}y_1^{(B)} + c_{33}z_1^{(B)} + z_{0_B}^{(0)} = v_z^{(1)}, & c_{11}x_2^{(B)} + c_{12}y_2^{(B)} + c_{13}z_2^{(B)} + x_{0_B}^{(0)} = v_x^{(2)}, \\ c_{21}x_2^{(B)} + c_{22}y_2^{(B)} + c_{23}z_2^{(B)} + y_{0_B}^{(0)} = v_y^{(2)}, & c_{31}x_2^{(B)} + c_{32}y_2^{(B)} + c_{33}z_2^{(B)} + z_{0_B}^{(0)} = v_z^{(2)}, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, & c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, & c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\ c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1, & c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, & c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.77)$$

Искомыми неизвестными в системе уравнений (2.77) являются 3 координаты $(x_{0_B}^{(0)} \quad y_{0_B}^{(0)} \quad z_{0_B}^{(0)})$ точки 0_B в системе координат $S_0 \equiv WORLD$, являющейся началом системы координат $S_B \equiv BASE$, и 9 направляющих косинусов матрицы поворота $R_{0,B}$. На основе решений системы уравнений (2.77) формируется матрица (2.74).

Калибровка по четырём точкам. По данному методу *TCP* робота подводится к четырём точкам базы, координаты которых известны, и в которых сохраняются данные о положениях робота. На основе сохранённых данных о положениях робота при выполнении калибровки вычисляются и сохраняются данные о положении и ориентации калибруемой базы.

Математическая модель, отражающая положение и ориентацию системы координат *BASE* в системе координат *WORLD*, может быть получена на основе выражения (3). Для четырех заданных точек будем иметь (рис. 2.18)

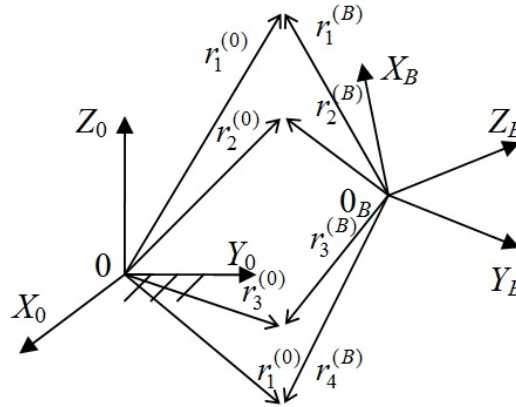


Рис. 2.18. Калибровка базы по четырём заданным точкам

$$r_1^{(0)} = A_{0,B} r_1^{(B)} = {}^{(1)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(1)}, \quad (2.78)$$

$$r_2^{(0)} = A_{0,B} r_2^{(B)} = {}^{(2)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(2)}, \quad (2.79)$$

$$r_3^{(0)} = A_{0,B} r_3^{(B)} = {}^{(3)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(3)}, \quad (2.80)$$

$$r_4^{(0)} = A_{0,B} r_4^{(B)} = {}^{(4)}A_{0,n} r_{0n}^{(n)} = V^{(4)}, \quad (2.81)$$

$$r_1^{(B)} = [x_1^{(B)} \quad y_1^{(B)} \quad z_1^{(B)} \quad 1]^T, \quad r_2^{(B)} = [x_2^{(B)} \quad y_2^{(B)} \quad z_2^{(B)} \quad 1]^T, \quad r_3^{(B)} = [x_3^{(B)} \quad y_3^{(B)} \quad z_3^{(B)} \quad 1]^T, \\ r_4^{(B)} = [x_4^{(B)} \quad y_4^{(B)} \quad z_4^{(B)} \quad 1]^T - \text{ радиус-векторы заданных точек.}$$

Раскрывая матричные уравнения (2.78–2.81) с учетом (2.59) можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1^{(B)} + c_{12}y_1^{(B)} + c_{13}z_1^{(B)} + x_{0_B}^{(0)} = v_x^{(1)}, & c_{21}x_1^{(B)} + c_{22}y_1^{(B)} + c_{23}z_1^{(B)} + y_{0_B}^{(0)} = v_y^{(1)}, \\ c_{31}x_1^{(B)} + c_{32}y_1^{(B)} + c_{33}z_1^{(B)} + z_{0_B}^{(0)} = v_z^{(1)}, & c_{11}x_2^{(B)} + c_{12}y_2^{(B)} + c_{13}z_2^{(B)} + x_{0_B}^{(0)} = v_x^{(2)}, \\ c_{21}x_2^{(B)} + c_{22}y_2^{(B)} + c_{23}z_2^{(B)} + y_{0_B}^{(0)} = v_y^{(2)}, & c_{31}x_2^{(B)} + c_{32}y_2^{(B)} + c_{33}z_2^{(B)} + z_{0_B}^{(0)} = v_z^{(2)}, \\ c_{11}x_3^{(B)} + c_{12}y_3^{(B)} + c_{13}z_3^{(B)} + x_{0_B}^{(0)} = v_x^{(3)}, & c_{21}x_3^{(B)} + c_{22}y_3^{(B)} + c_{23}z_3^{(B)} + y_{0_B}^{(0)} = v_y^{(3)}, \\ c_{31}x_3^{(B)} + c_{32}y_3^{(B)} + c_{33}z_3^{(B)} + z_{0_B}^{(0)} = v_z^{(3)}, & c_{11}x_4^{(B)} + c_{12}y_4^{(B)} + c_{13}z_4^{(B)} + x_{0_B}^{(0)} = v_x^{(4)}, \\ c_{21}x_4^{(B)} + c_{22}y_4^{(B)} + c_{23}z_4^{(B)} + y_{0_B}^{(0)} = v_y^{(4)}, & c_{31}x_4^{(B)} + c_{32}y_4^{(B)} + c_{33}z_4^{(B)} + z_{0_B}^{(0)} = v_z^{(4)}. \end{cases} \quad (2.82)$$

Решение системы уравнений (2.82) необходимо подставить в уравнение (2.74). Полученная таким образом матрица преобразования однородных координат составляет математическую модель для метода калибровки базы промышленных роботов по четырем заданным точкам.

2.3 Моделирование изменяющихся линейных и угловых отклонений в шарнирах манипуляционных систем роботов

2.3.1 Моделирование линейных отклонений в шарнирах

2.3.1.1 Постановка задачи моделирования

Отклонения в шарнирах манипуляционных систем могут быть вызваны различными причинами. Отклонения, возникающие из-за неточности изготовления деталей и их последующей сборки, относят к первичным геометрическим отклонениям (см. п. 2.1.1). При эксплуатации механизмов первичные геометрические отклонения дополняются отклонениями, возникающими из-за износа и повреждения деталей, а также из-за изменения температуры. Такого рода отклонения не изменяются в процессе выполнения заданного (программного) движения механизма и могут быть определены метрологическим путём и скомпенсированы специальными методами коррекции (см. п. 2.1.7).

Отклонения в шарнирах манипуляционных систем роботов, возникающие в процессе выполнения ими движения, представляют собой, как правило, упругие деформации, приводящие к смещению центров шарниров относительно их недеформированных положений. Наличие зазоров в шарнирах также приводит к возникновению отклонений. Такого рода отклонения представляют собой изменяющиеся линейные и угловые отклонения в шарнирах манипуляционных систем и для их исследования необходимы специальные динамические модели.

Будем считать, что жёсткость звеньев и шарниров на кручение существенно выше жёсткости на их растяжение и сжатие. Исходя из этого допущения при построении расчётной динамической модели манипуляционных систем, угловые отклонения, являющиеся следствием изменения формы звеньев и шарниров, могут быть исключены из рассмотрения на данном этапе.

Напомним, что манипуляционные системы структурно представляют собой разомкнутую кинематическую цепь, состоящую из звеньев, соединённых кинематическими парами пятого класса. Звенья моделируются абсолютно твёрдыми телами.

Степень свободы (вращательная или поступательная), реализуемая конструктивным исполнением i -го шарнира, соединяющего $(i-1)$ -е и i -е звенья в i -ю кинематическую пару, обеспечивает программное движение манипуляционной системы. Эту степень свободы будем называть основной и обозначать соответствующей ей обобщённой координатой q_i , $i=(1, \dots, n)$, где n – число основных степеней свободы манипуляционной системы.

Дополнительно к основной степени свободы для каждого шарнира введём в рассмотрение три вспомогательные степени свободы $X_i=(x_i, y_i, z_i)$, $i=(1, \dots, n)$, отражающие возможные линейные отклонения (смещения) центра i -го шарнира относительно $(i-1)$ -го звена (рис. 2.19).

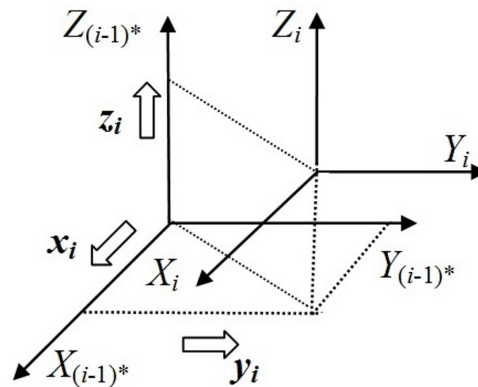


Рис. 2.19. Моделирование линейных отклонений в шарнире

По существу, в данной постановке задачи шарнирные соединения звеньев манипуляционной системы моделируются кинематическими парами, имеющими четыре степени свободы: одну основную (вращательную или поступательную), обеспечивающую программное движение в шарнире, и три поступательные, учитывающие возможные линейные отклонения, представляющие собой смещения центра шарнира относительно опорного звена. Таким образом, общее число степеней свободы манипуляционной системы становится равным $4n$.

2.3.1.2 Геометрическая модель

С каждым звеном манипуляционной системы свяжем две системы координат (см. п. 1.1.2). В центре кинематической пары, соединяющей i -е и $(i-1)$ -е звенья, поместим систему координат S_i . Ось Z_i направим вдоль оси относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев. В центре кинематической пары i -го и $(i+1)$ -го звеньев поместим систему координат $S_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$. Оси X_i^* , Y_i^* и Z_i^* направим так, чтобы системы S_i^* и $S_{(i+1)}$ совпадали в исходном положении манипуляционной системы.

При рассмотрении взаимного положения связываемых со звеньями систем координат будем использовать матрицы преобразования однородных координат (2.2) с учётом первичных линейных отклонений (см. п. 2.1.2). Матрица преобразования однородных координат, соответствующая переходу из системы $S_{(i-1)^*}$ в систему $S_{(i-1)}$, в этом случае будет иметь вид

$$A_{(i-1),(i-1)^*} = \begin{bmatrix} \cos(X_{(i-1)}, X_{(i-1)^*}) & \cos(X_{(i-1)}, Y_{(i-1)^*}) & \cos(X_{(i-1)}, Z_{(i-1)^*}) & l_{(i-1)}^x + x_i \\ \cos(Y_{(i-1)}, X_{(i-1)^*}) & \cos(Y_{(i-1)}, Y_{(i-1)^*}) & \cos(Y_{(i-1)}, Z_{(i-1)^*}) & l_{(i-1)}^y + y_i \\ \cos(Z_{(i-1)}, X_{(i-1)^*}) & \cos(Z_{(i-1)}, Y_{(i-1)^*}) & \cos(Z_{(i-1)}, Z_{(i-1)^*}) & l_{(i-1)}^z + z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

где $\cos(X_{(i-1)}, X_{(i-1)^*})$ и т.д. – косинусы углов между соответствующими осями координат; $[l_{(i-1)}^x + x_i, l_{(i-1)}^y + y_i, l_{(i-1)}^z + z_i]^T$ – вектор координат начала системы $S_{(i-1)^*}$ в системе $S_{(i-1)}$; $(l_{(i-1)}^x, l_{(i-1)}^y, l_{(i-1)}^z)$ – постоянные геометрические параметры $(i-1)$ -го звена; (x_i, y_i, z_i) – дополнительные координаты (степени свободы), отражающие возможные смещения центра i -го шарнира относительно $(i-1)$ -го звена.

Так как за ось относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев выбрана ось Z_i , то матрица, описывающая движение системы S_i относительно системы $S_{(i-1)^*}$, будет иметь вид (1.10). Матрица относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев может быть представлена произведением матриц (1.4):

$$A_{(i-1),i} = A_{(i-1),(i-1)^*} A_{(i-1)^*,i}.$$

Матрица преобразования однородных координат из системы S_k , связанной с k -м звеном, в абсолютную (неподвижную) систему координат S_0 может быть определена как последовательность произведений (1.5):

$$A_{0,k} = A_{0,1}A_{1,2}\dots A_{(i-1),i}A_{i,(i+1)}\dots A_{(k-1),k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}.$$

Рассмотрим частные производные от полученных матриц преобразования однородных координат по дополнительным координатам $X_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Учитывая вид матрицы (2.18), дифференцирование выражения (1.4) даст

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial X_i} = \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial X_i} A_{(i-1)^*,i} = \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial X_i}. \quad (2.84)$$

Действительно, для дополнительной координаты x_i получим

$$\frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial x_i} A_{(i-1)^*,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial x_i}. \quad (2.85)$$

Аналогичные матричные выражения справедливы для дополнительных координат y_i и z_i .

Для выполнения дальнейших преобразований докажем следующее тождество:

$$\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial X_i \partial X_j} = 0, \quad i, j = (1, \dots, n). \quad (2.86)$$

Выражение (2.86) может быть разложено на основе (1.5)

$$\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial X_i \partial X_j} = A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial X_i} A_{i,(j-1)} \frac{\partial A_{(j-1),j}}{\partial X_j} A_{j,k} = A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial X_i} A_{i,(j-1)} \frac{\partial A_{(j-1),(j-1)^*}}{\partial X_j} A_{j,k}. \quad (2.87)$$

Матрица преобразования однородных координат из системы S_i в систему S_j может быть представлена в общем виде:

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Используя общий вид матрицы преобразования однородных координат (2.88) и выражение (2.85), при $X_i = x_i$, $X_j = x_j$ матричное произведение (2.87) можно представить по частям:

$$A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{a}_{14} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{24} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} & \hat{a}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{11} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial x_i} A_{i,(j-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{11} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{11} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

$$A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial x_i} A_{i,(j-1)} \frac{\partial A_{(j-1),(j-1)^*}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{11} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Выражения (2.89 – 2.91) доказывают справедливость тождества (2.86) при $X_i = x_i$ и $X_j = x_j$. Аналогично тождество (2.86) можно доказать для всех сочетаний дополнительных координат $X_i = (x_i, y_i, z_i)$, $X_j = (x_j, y_j, z_j)$. Данное тождество отражает отсутствие кориолисовых и центробежных ускорений в относительном движении систем координат S_i и S_j .

2.3.1.3 Динамическая модель

К описанию динамики манипуляционных систем с шарнирами, внутри которых могут учитываться линейные отклонения, применим подход, основывающийся на методе Лагранжа – Эйлера с использованием матриц преобразования однородных координат.

Запишем уравнение Лагранжа для манипуляционных систем (1.48) с учётом дополнительно введенных степеней свободы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \ddot{A}_{0,k}^T \right), \quad (2.92)$$

где $s_i = (q_i, X_i)$, $i = (1, \dots, n)$ – обобщённые координаты (основные и вспомогательные); n – число звеньев (число кинематических пар).

Запишем выражение матрицы $\ddot{A}_{0,k}$. Для этого дважды продифференцируем матрицу $A_{0,k}$.

$$\dot{A}_{0,k} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial z_i} \dot{z}_i \right). \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{0,k} = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial z_i} \ddot{z}_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial x_j} \dot{q}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial y_j} \dot{q}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial z_j} \dot{q}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial q_j} \dot{x}_i \dot{q}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial y_j} \dot{x}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial z_j} \dot{x}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial q_j} \dot{y}_i \dot{q}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial x_j} \dot{y}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial y_j} \dot{y}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial z_j} \dot{y}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial q_j} \dot{z}_i \dot{q}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial x_j} \dot{z}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial y_j} \dot{z}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial z_j} \dot{z}_i \dot{z}_j \end{aligned} \right). \quad (2.94) \end{aligned}$$

С учётом (2.86) часть слагаемых в выражении (2.94), стоящих под знаком двойной суммы, равны нулю. Исключив их и выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{0,k} = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial z_i} \ddot{z}_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \left(\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial x_j} \dot{q}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial y_j} \dot{q}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial z_j} \dot{q}_i \dot{z}_j \right) \right). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Выражение (2.95) подставим в уравнение Лагранжа (2.92). Сгруппировав слагаемые и выделив векторы скоростей и ускорений обобщённых координат, представим уравнение движения в матричной форме.

Пусть $\{\dot{q}\}, \{\ddot{q}\}$ – векторы $(n \times 1)$ скоростей и ускорений основных обобщённых координат; $\{\dot{x}\}, \{\ddot{x}\}, \{\dot{y}\}, \{\ddot{y}\}, \{\dot{z}\}, \{\ddot{z}\}$ – векторы $(n \times 1)$ скоростей и ускорений вспомогательных обобщённых координат. Тогда для каждой обобщённой силы, соответствующей одной из обобщённых координат, получим матричные уравнения

$$\begin{aligned} [M_i^{qq}] \{\ddot{q}\} + [M_i^{qx}] \{\ddot{x}\} + [M_i^{qy}] \{\ddot{y}\} + [M_i^{qz}] \{\ddot{z}\} + \\ + \{\dot{q}\}^T [C_i^{qqq}] \{\dot{q}\} + 2 \left(\{\dot{q}\}^T [C_i^{qqx}] \{\dot{x}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{qqy}] \{\dot{y}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{qqz}] \{\dot{z}\} \right) = Q_i^q, \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} [M_i^{xq}] \{\ddot{q}\} + [M_i^{xx}] \{\ddot{x}\} + [M_i^{xy}] \{\ddot{y}\} + [M_i^{xz}] \{\ddot{z}\} + \\ + \{\dot{q}\}^T [C_i^{xqq}] \{\dot{q}\} + 2 \left(\{\dot{q}\}^T [C_i^{xqx}] \{\dot{x}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{xqy}] \{\dot{y}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{xqz}] \{\dot{z}\} \right) = Q_i^x, \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} [M_i^{yq}] \{\ddot{q}\} + [M_i^{yx}] \{\ddot{x}\} + [M_i^{yy}] \{\ddot{y}\} + [M_i^{yz}] \{\ddot{z}\} + \\ + \{\dot{q}\}^T [C_i^{yqq}] \{\dot{q}\} + 2 \left(\{\dot{q}\}^T [C_i^{yqx}] \{\dot{x}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{yqy}] \{\dot{y}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{yqz}] \{\dot{z}\} \right) = Q_i^y, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} [M_i^{zq}] \{\ddot{q}\} + [M_i^{zx}] \{\ddot{x}\} + [M_i^{zy}] \{\ddot{y}\} + [M_i^{zz}] \{\ddot{z}\} + \\ + \{\dot{q}\}^T [C_i^{zqq}] \{\dot{q}\} + 2 \left(\{\dot{q}\}^T [C_i^{zqx}] \{\dot{x}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{zqy}] \{\dot{y}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i^{zqz}] \{\dot{z}\} \right) = Q_i^z. \end{aligned} \quad (2.99)$$

В уравнениях (2.96–2.99) матрицы (матричные коэффициенты) и векторы, имеют размерность равную n , соответствующую количеству основных степеней свободы системы, они обозначаются соответственно в квадратных и фигурных скобках.

Матричные коэффициенты уравнений (2.96–2.99) представим в развёрнутом виде, используя в их индексах символы v и w для условного обозначения обобщённых координат x, y, z и q :

$$[M_i^{vw}] = \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial w_1} \right) \quad \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial w_2} \right) \quad \dots \quad \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial w_n} \right) \right]; \quad (2.100)$$

$$[C_i^{vqw}] = \sum_{k=1}^n \left[\begin{array}{cccc} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial w_1} \right) & \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial w_2} \right) & \dots & \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial w_n} \right) \\ \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial w_1} \right) & \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial w_2} \right) & \dots & \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial w_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial w_1} \right) & \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial w_2} \right) & \dots & \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n \partial w_n} \right) \end{array} \right]. \quad (2.101)$$

Так, например, в обозначении $[M_i^{vw}]$ для матрицы $[M_i^{qq}]$ оба символа v и w соответствуют q , для матрицы $[M_i^{qx}]$ символ v соответствует q , а символ w соответствует x , для матрицы $[M_i^{yz}]$ соответственно $v - y$, а $w - z$ и т.д. В обозначении $[C_i^{vqw}]$ для матрицы $[C_i^{qqq}]$ оба символа v и w соответствуют q , для матрицы $[C_i^{xqy}]$ символ v соответствует x , а символ w соответствует y , для матрицы $[C_i^{yqz}]$ соответственно $v - y$, а $w - z$ и т.д.

Таким образом, полученные уравнения (2.96–2.99) являются искомыми уравнениями движения (динамической моделью), позволяющими моделировать линейные отклонения, возникающие в шарнирах манипуляционных систем.

2.3.1.4 Анализ модели

Матрицы-строки $[M_i^{vw}]$, имеют размерность $1 \times n$ (см. 2.100). Элементы этих матриц не обращаются в ноль одновременно. Действительно, элементы матриц $A_{(i-1),i}$ в соответствии с (2.83 и 1.4) являются функциями переменных x_i, y_i, z_i и q_i , поэтому частные производные от матриц $A_{0,k}$ в соответствии с (1.5) будут иметь вид

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = A_{0,1} A_{1,2} \dots A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial q_i} A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k},$$

или с учётом дополнительно (2.84 и 2.85)

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} = A_{0,1} A_{1,2} \dots \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial v_i} A_{(i-1),i} A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k},$$

где v_i может принимать значения x_i, y_i или z_i . Например, если $v_i = x_i$, то (см. 2.89 и 2.90)

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} = A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),(i-1)^*}}{\partial x_i} A_{(i-1),i} A_{i,k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_{i,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что выражения $tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial v_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial w_j} \right)$, ($i, j = 1, \dots, n$) будут от-

личны от нуля для всех возможных значений v_i и w_j . Исследуемые частные производные обращаются в ноль только в случае $i \rangle k$, или $j \rangle k$, но так как, анализиру-

емые матрицы-строки представляют собой суммы $[M_i^{vw}] = \sum_{k=1}^n [M_{ki}^{vw}]$ то, в конечном

счете, их элементы также будут отличны от нуля. Сформированные из этих строк симметрические матрицы $[M^{vw}] = \begin{bmatrix} [M_1^{vw}] & \dots & [M_i^{vw}] & \dots & [M_n^{vw}] \end{bmatrix}^T$, имеющие размерность $n \times n$, не будут вырожденными (см. п. 1.3.5). Положительная определенность мат-

рицы $[M^{qq}] = \begin{bmatrix} [M_1^{qq}] & \dots & [M_i^{qq}] & \dots & [M_n^{qq}] \end{bmatrix}^T$ обосновывается и используется во многих работах по динамике систем тел [3, 5]. Структура остальных матриц $[M^{vw}]$ – ана-

логична. Дополнительные обобщенные координаты x_i , y_i и z_i , также как и основные q_i ($i=1, \dots, n$), являются инерционными.

Анализ матриц $[C_i^{vqw}]$, имеющих размерность $n \times n$, также показывает, что в общем случае, их элементы не равны нулю.

Уравнения движения манипуляционных систем аналогичные полученным, учитывающие смещения шарниров относительно опорных для этих шарниров звеньев, могут быть составлены альтернативным способом, путём введения в кинематическую схему манипуляционной системы дополнительных безынерционных (фиктивных) звеньев. Геометрический размер безынерционных звеньев определяется допустимыми значениями вспомогательных обобщённых координат, соответствующих этим звеньям и отражающих смещения шарниров внутри основных (реальных) звеньев. Для каждого основного звена необходимо ввести дополнительно три таких безынерционных звеньев, последовательно соединённых друг с другом и данным звеном одностепенными поступательными шарнирами. Таким образом, кинематическая цепь манипуляционной системы дополняется участками безынерционных звеньев, образующих друг с другом поступательные кинематические пары пятого класса.

Составленные таким образом на основе уравнения (2.92) матричные уравнения движения будут иметь размерность, равную $4n$, где n – число основных звеньев. Большинство матричных элементов этих уравнений, согласно доказанному тождеству (2.86), будут тождественно равны нулю. Поэтому вычислительные затраты при решении этих уравнений будут значительными.

В то же время в выражениях для матричных коэффициентов (2.100 и 2.101) из уравнений (2.96 – 2.99) исключены тождественно равные нулю элементы, отражающие взаимовлияние степеней подвижности, отвечающих за смещения шарниров. Это значительно снизило вычислительные затраты при решении данных уравнений.

Вычислительная сложность уравнений может быть оценена количеством вычисляемых при их решении матричных элементов. Так, при решении уравнения, использующего дополнительные безынерционные (фиктивные) звенья, для

определения i -й обобщённой силы ($i=1, \dots, 4n$) потребуется выполнить s_1 вычислений скалярного элемента, а при решении одного из уравнений (2.96 – 2.99) количество таких вычислений определяется зависимостью s_2 , где

$$s_1 = 4n(1 + 4n), \quad s_2 = 4n(1 + n), \quad \frac{s_1}{s_2} = 1 + \frac{3n}{1 + n}. \quad (2.102)$$

Как видно из (2.102), вычислительная сложность полученных уравнений уменьшена почти в 4 раза.

Смещения внутри шарниров могут быть вызваны упругой податливостью опорного для данного шарнира звена, т. е. звена, ближайшего по кинематической цепи к основанию манипуляционной системы. Упругость может быть сосредоточена и в самом шарнире, являясь результатом контактного взаимодействия составляющих шарнир элементов.

Упругая податливость звеньев или шарниров в уравнениях (2.96 – 2.99) может быть учтена при составлении правой части этих уравнений заданием упругой составляющей обобщённой силы. Смещения шарниров, вызываемые упругой податливостью, не обязательно должны быть малыми. Такое ограничение не накладывалось при выводе этих уравнений.

2.3.1.5 Методика моделирования

Применение методики моделирования изменяющихся линейных геометрических отклонений (смещений) в шарнирах манипуляционных систем роботов, основанной на предложенной динамической модели, рассмотрим на примере манипуляционной системы, содержащей одно звено, соединённое с неподвижным основанием вращательным шарниром (рис. 2.20).

Исследуемая манипуляционная система имеет две степени свободы, одна основная вращательная – q_1 , соответствующая конструктивной подвижности шарнира, вторая дополнительная линейная – x_1 , обусловленная упругой податливостью шарнира по оси X_0 . Звено представляет собой стержень длиной l_1 и массой m_1 . Активными силами, действующими на звено, являются вращающий момент D_1 , развиваемый приводом, вес звена $G_1 = m_1 g$ ($g = 9.81 \text{ м/с}^2$) и сила упругости

$P_1 = -a_1 x_1$, возникающая в шарнире при его деформации в направлении оси X_0 . Соответственно a_1 – жесткость шарнира по данному направлению.

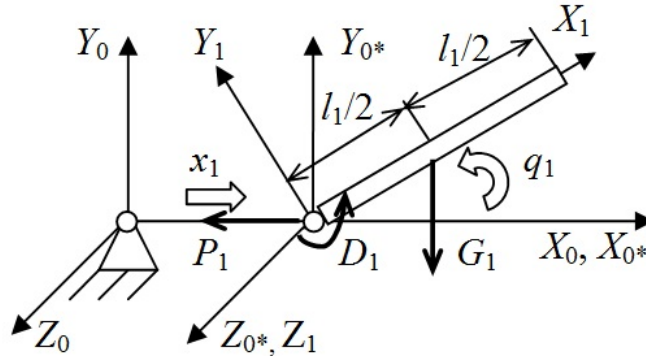


Рис. 2.20. Пример моделирования линейного отклонения по оси X_0

Уравнения движения, соответствующие уравнениям (2.96 и 2.97) для рассматриваемой манипуляционной системы будут иметь вид

$$[M_1^{qq}] \ddot{q}_1 + [M_1^{qx}] \ddot{x}_1 + [C_1^{qqq}] \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 [C_1^{qqx}] \dot{x}_1 = Q_1^q, \quad (2.103)$$

$$[M_1^{xq}] \ddot{q}_1 + [M_1^{xx}] \ddot{x}_1 + [C_1^{xqq}] \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 [C_1^{xqx}] \dot{x}_1 = Q_1^x. \quad (2.104)$$

Матричные коэффициенты в полученных уравнениях в соответствии с (2.100 и 2.101) сводятся к скалярному виду:

$$[M_1^{qq}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial q_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial q_1} \right), \quad [M_1^{qx}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial q_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial x_1} \right), \quad [M_1^{xq}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial q_1} \right),$$

$$[M_1^{xx}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial x_1} \right), \quad [C_1^{qqq}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial q_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial q_1^2} \right), \quad [C_1^{qqx}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial q_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial q_1 \partial x_1} \right),$$

$$[C_1^{xqq}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial q_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial q_1^2} \right), \quad [C_1^{xqx}] = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial q_1 \partial x_1} \right).$$

Матрицы преобразования однородных координат и их частные производные:

$$A_{0,0^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{0^*,1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{0,1} = A_{0,0^*} A_{0^*,1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & x_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A_{0,1}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 A_{0,1}}{\partial q_1^2} = \begin{bmatrix} -\cos q_1 & \sin q_1 & 0 & 0 \\ -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 A_{0,1}}{\partial q_1 \partial x_1} = 0.$$

Матрица инерции звена относительно системы координат $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$, в соответствии с правилом преобразования матриц инерции (1.63), будет иметь вид

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{l_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} & 0 & 0 & \frac{m_1 l_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1 l_1}{2} & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}.$$

Используя составленные матрицы в выражениях для соответствующих матричных коэффициентов получим

$$[M_1^{qq}] = \frac{m_1 l_1^2}{3}, \quad [M_1^{qx}] = -\frac{m_1 l_1}{2} \sin q_1, \quad [M_1^{xq}] = -\frac{m_1 l_1}{2} \sin q_1, \quad [M_1^{xx}] = m_1,$$

$$[C_1^{qqq}] = 0, \quad [C_1^{qqx}] = 0, \quad [C_1^{xqx}] = 0, \quad [C_1^{xqq}] = -\frac{m_1 l_1}{2} \cos q_1.$$

Подставив полученные выражения для матричных коэффициентов в уравнения (2.103 и 2.104) и определив соответствующие обобщенные силы в соответствии с п. 1.2.10 составим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{m_1 l_1^2}{3} \ddot{q}_1 - \frac{m_1 l_1 \sin q_1}{2} \ddot{x}_1 = D_1 - \frac{1}{2} l_1 m_1 g \cos q_1, \\ -\frac{m_1 l_1 \sin q_1}{2} \ddot{q}_1 + m_1 \ddot{x}_1 - \frac{m_1 l_1 \cos q_1}{2} \dot{q}_1^2 = -a_1 x_1. \end{cases} \quad (2.105)$$

Составленная на основе уравнений (2.103 и 2.104) система уравнений движения исследуемой манипуляционной системы, рассматриваемой как твёрдое тело, совершающее одновременно поступательное и вращательное движения (см. рис. 2.10), может быть получена также и другими известными методами теоретической механики.

2.3.1.6 Адекватность модели

Для проверки адекватности модели (2.103 и 2.104) и системы уравнений (2.105) в частности используем иной способ их составления. Рассмотрим расчётную схему, составленную для твёрдого тела, совершающего одновременно поступательное и вращательное движения (рис. 2.21). Тело представляет собой стержень длиной l и массой m . С телом свяжем две системы координат S_{0^*} (X_{0^*} , Y_{0^*} , Z_{0^*}) и S_1 (X_1 , Y_1 , Z_1) с общим началом в точке O_1 . Система координат S_{0^*} движется относительно неподвижной системы координат S_0 поступательно вдоль оси X_0 . Обе системы координат совпадают, когда координата точки O_1 $x = 0$. Система координат S_1 совершает вместе с телом вращательное движение вокруг оси Z_1 , совпадающей с осью Z_{0^*} .

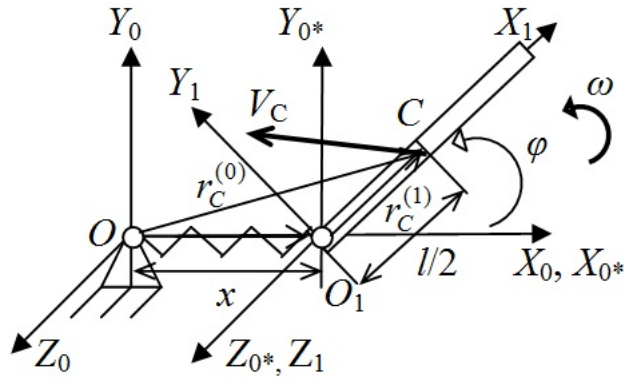


Рис. 2.21. Расчетная схема

Кинетическая энергия тела при плоском движении может быть представлена выражением

$$E = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \quad (2.106)$$

где V_C – скорость центра тяжести тела в неподвижной системе координат S_0 , J_C – момент инерции тела относительно оси параллельной Z_1 и проходящей через точку C – центр тяжести тела, ω – угловая скорость вращения тела.

Радиус-вектор точки C в системе координат S_0 может быть выражен через координаты точки C в системе координат S_1 .

$$r_C^{(0)} = A_{0,1}r_C^{(1)}, \quad r_C^{(1)} = [l/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T. \quad (2.107)$$

В развёрнутом виде выражение (2.107) имеет вид

$$r_C^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & x \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l/2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2}\cos\varphi + x \\ \frac{l}{2}\sin\varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Скорость центра тяжести тела V_C будет иметь вид

$$V_C = \frac{dr_C^{(0)}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{x} \\ \frac{l\dot{\varphi}}{2} \cos \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

На основе (2.109) можно определить квадрат скорости

$$V_C^2 = \dot{x}^2 - l\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{l^2\dot{\varphi}^2}{4}. \quad (2.110)$$

Момент инерции тела и угловую скорость представим выражениями

$$J_C = \frac{ml^2}{12}, \quad \omega = \dot{\varphi}. \quad (2.111)$$

Подставим (2.110) и (2.111) в (2.106), получим

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}l\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2. \quad (2.112)$$

Выражение для кинетической энергии тела (2.112) подставим в уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial s_i} = Q_i \quad (i=1,2), \quad (2.113)$$

где $s_1=x$, $s_2=\varphi$, $Q_1=Q^x$, $Q_2=Q^\varphi$.

Получим систему уравнений движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} - \frac{m}{2}l\ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{m}{2}l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = Q^x, \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{m}{2}l\ddot{x} \sin \varphi = Q^\varphi. \end{cases} \quad (2.114)$$

Обобщённые силы, составляющие правую часть уравнений движения, определим из выражения элементарной работы внешних сил, приложенных к телу (см. рис. 2.11), с учётом замены: $P_1 = -ax$ – сила упругости, $G_1 = mg$ ($g = 9.81 \text{ м/с}^2$) – сила тяжести (вес), $D_1 = M$ – момент внешних сил.

$$\delta W = Q^x \delta x + Q^\varphi \delta \varphi = -ax \delta x + M \delta \varphi - \frac{lmg \cos \varphi}{2} \delta \varphi,$$

следовательно,

$$Q^x = -ax, \quad Q^\varphi = M - \frac{l}{2} mg \cos \varphi. \quad (2.115)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (2.114) с учётом (2.115) совпадает с полученной ранее системой уравнений движения (2.105).

2.3.2 Моделирование угловых отклонений в шарнирах

2.3.2.1 Постановка задачи моделирования

Уравнения движения (2.96 – 2.99) учитывают только смещения центров шарниров, аналогичные сдвигу (параллельному переносу), но не учитывают возможные перекосы (скручивания) шарниров, приводящие к угловым отклонениям. В основном скручивание шарниров обусловлено зазорами внутри самого шарнира. Также оно может быть обусловлено изгибом или кручением опорного звена.

Так как манипуляционные системы представляют собой разомкнутые кинематические цепи, то накапливающаяся погрешность от скручивания может привести к существенному отклонению траектории движения конечного звена (см. п. 2.1.6).

Составить модель манипуляционной системы, позволяющую учитывать угловые отклонения в шарнирах можно, если для каждого шарнира дополнительно к его основной степени свободы ввести в рассмотрение две вспомогательные степени свободы, отражающие возможные угловые отклонения, соответствующие скручиванию этого шарнира внутри образующей его кинематической пары. Та-

ким образом, общее число степеней свободы манипуляционной системы становится равным $3n$.

По существу, в данной постановке задачи шарнирные соединения звеньев манипуляционных систем моделируются кинематическими парами, имеющими три степени свободы (α , β , q): одну основную – q (вращательную или поступательную), обеспечивающую программное движение в сочленении, и две вращательные – α и β , учитывающие возможные скручивания шарнира относительно опорного для этого шарнира звена (рис. 2.22).

Следует учитывать, что при полностью детерминированной постановке задачи при моделировании отклонений в шарнирах манипуляционных систем возникает проблема определения начальных условий. Для определения параметров, соответствующих начальным условиям движения, необходимо первоначально рассмотреть уравнения статического равновесия.

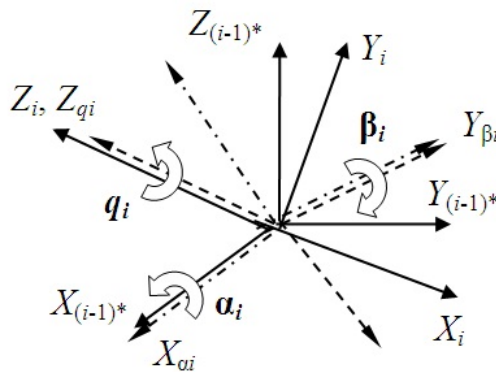


Рис. 2.22. Моделирование угловых отклонений в шарнире

2.3.2.2 Геометрическая модель

Для построения геометрической модели манипуляционных систем, учитывающей угловые отклонения в шарнирах, будем использовать метод, рассмотренный в п. 1.1.2, согласно которому с каждым звеном манипуляционной системы необходимо связать две системы координат: S_i и S_i^* .

В центре кинематической пары, соединяющей i -е и $(i-1)$ -е звенья, поместим систему координат S_i . Ось Z_i направим вдоль оси относительного движения i -го и

$(i-1)$ -го звеньев. Если эта ось перпендикулярна прямой, соединяющей центры кинематических пар i -го звена, то ось X_i направляется по этой прямой.

Центр системы координат $S_{(i-1)*}$ совместим с центром системы S_i . Оси $X_{(i-1)*}$, $Y_{(i-1)*}$ и $Z_{(i-1)*}$ направим так, чтобы системы координат $S_{(i-1)*}$ и S_i совпадали в исходном положении манипуляционной системы. При рассмотрении взаимного положения связываемых со звеньями систем координат будем использовать матрицы преобразования однородных координат (см. п. 1.1.3).

Матрица преобразования однородных координат, соответствующая переходу из системы $S_{(i-1)*}$ в систему $S_{(i-1)}$, будет иметь вид (1.9)

$$A_{(i-1),(i-1)*} = \begin{bmatrix} \cos(X_{(i-1)}, X_{(i-1)*}) & \cos(X_{(i-1)}, Y_{(i-1)*}) & \cos(X_{(i-1)}, Z_{(i-1)*}) & l_{(i-1)}^x \\ \cos(Y_{(i-1)}, X_{(i-1)*}) & \cos(Y_{(i-1)}, Y_{(i-1)*}) & \cos(Y_{(i-1)}, Z_{(i-1)*}) & l_{(i-1)}^y \\ \cos(Z_{(i-1)}, X_{(i-1)*}) & \cos(Z_{(i-1)}, Y_{(i-1)*}) & \cos(Z_{(i-1)}, Z_{(i-1)*}) & l_{(i-1)}^z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.116)$$

где $\cos(X_{(i-1)}, X_{(i-1)*})$ и т. д. – косинусы углов между соответствующими осями координат; $[l_{(i-1)}^x, l_{(i-1)}^y, l_{(i-1)}^z]^T$ – вектор координат начала системы $S_{(i-1)*}$ в системе $S_{(i-1)}$. Элементы матрицы $A_{(i-1),(i-1)*}$ являются постоянными геометрическими параметрами $(i-1)$ -го звена.

Так как за ось относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев выбрана ось Z_i , матрица, определяющая положение системы S_i относительно системы $S_{(i-1)*}$, должна иметь вид (1.10)

$$A_{(i-1)*,i}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos(b_i q_i) & -\sin(b_i q_i) & 0 & 0 \\ \sin(b_i q_i) & \cos(b_i q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-b_i)q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

где q_i – i -я обобщённая координата,

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если кинематическая пара – вращательная;} \\ 0 & \text{– если поступательная.} \end{cases}$$

Введение двух вспомогательных степеней свободы α_i и β_i ($i=1, \dots, n$), отражающих возможные скручивания шарнира внутри кинематической пары, приведёт к изменению матрицы $A_{(i-1)^*,i}$. Матрица преобразования координат из системы S_i в систему $S_{(i-1)^*}$ кроме основного перемещения (2.117) вдоль оси Z_i и совпадающей с ней оси Z_{i^*} должна учитывать повороты системы S_i относительно осей X_{i^*} и Y_{i^*} соответственно на углы α_i и β_i . Соответствующие этим поворотам матрицы преобразования однородных координат будут иметь вид [66]

$$A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

$$A_{(i-1)^*,i}(\beta_i) = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & 0 & \sin \beta_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_i & 0 & \cos \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

Матрица преобразования координат $A_{(i-1)^*,i}$, последовательно отражающая три поворота относительно осей X_{i^*} , Y_{i^*} и Z_{i^*} , может быть представлена произведением матриц (2.117 – 2.119):

$$A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, q_i) = A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i) A_{(i-1)^*,i}(\beta_i) A_{(i-1)^*,i}(q_i). \quad (2.120)$$

В развёрнутом виде матрица $A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, q_i)$ будет выглядеть так

$$\begin{bmatrix} C(\beta_i)C(b_i q_i) & -C(\beta_i)S(b_i q_i) & S(\beta_i) & (1-b_i)q_i S(\beta_i) \\ C(\alpha_i)S(b_i q_i) + S(\alpha_i)S(\beta_i)C(b_i q_i) & C(\alpha_i)C(b_i q_i) - S(\alpha_i)S(\beta_i)S(b_i q_i) & -S(\alpha_i)C(\beta_i) & (b_i-1)q_i S(\alpha_i)C(\beta_i) \\ S(\alpha_i)S(b_i q_i) - C(\alpha_i)S(\beta_i)C(b_i q_i) & S(\alpha_i)C(b_i q_i) + C(\alpha_i)S(\beta_i)S(b_i q_i) & C(\alpha_i)C(\beta_i) & (1-b_i)q_i C(\alpha_i)C(\beta_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.121)$$

В выражении (2.121) тригонометрические функции \sin и \cos обозначены сокращённо символами S и C соответственно.

Матрица относительного движения i -го и $(i-1)$ -го звеньев может быть представлена произведением матриц (1.4):

$$A_{(i-1),i} = A_{(i-1),(i-1)^*} A_{(i-1)^*,i}.$$

Частные производные от матрицы $A_{(i-1),i}$ определяются следующими выражениями:

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial \beta_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial \beta_i}, \quad \frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial q_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i^2} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i^2}, \quad \frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \beta_i^2} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \beta_i^2},$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial q_i^2} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial q_i^2},$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i}, \quad \frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i \partial q_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i \partial q_i},$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \beta_i \partial q_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \beta_i \partial q_i}.$$

Матрица преобразования однородных координат из системы S_k , связанной с k -м звеном, в абсолютную (неподвижную) систему S_0 может быть определена как последовательность произведений (1.5):

$$A_{0,k} = A_{0,1} A_{1,2} \dots A_{(i-1),i} A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}.$$

Частные производные от матрицы $A_{0,k}$ определяются по правилу нахождения производных от функций нескольких переменных. Приведём пример нескольких выражений для определения соответствующих частных производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{0,k}}{\partial \alpha_i} &= A_{0,(i-1)} \frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i} A_{i,k} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i} A_{i,k}; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i^2} &= A_{0,(i-1)} \frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i^2} A_{i,k} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i^2} A_{i,k}; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} &= A_{0,(i-1)} \frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} A_{i,k} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} A_{i,k}; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial q_i} &= A_{0,(i-1)} \frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i \partial q_i} A_{i,k} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial^2 A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i \partial q_i} A_{i,k}; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} &= A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i} A_{i,(j-1)} A_{(j-1),(j-1)^*} \frac{\partial A_{(j-1)^*,j}}{\partial \beta_j} A_{j,k}; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial q_j} &= A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial \alpha_i} A_{i,(j-1)} A_{(j-1),(j-1)^*} \frac{\partial A_{(j-1)^*,j}}{\partial q_j} A_{j,k}; \\
\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial q_j} &= A_{0,(i-1)} A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial \beta_i} A_{i,(j-1)} A_{(j-1),(j-1)^*} \frac{\partial A_{(j-1)^*,j}}{\partial q_j} A_{j,k}.
\end{aligned}$$

Приведём выражения для этих матриц при малых скручиваниях. Пусть $\alpha_i \ll 1$ и $\beta_i \ll 1$, тогда $\sin(\alpha_i) = \alpha_i$, $\sin(\beta_i) = \beta_i$, $\cos(\alpha_i) = 1$, $\cos(\beta_i) = 1$ ($i=1, \dots, n$). В этом случае частные производные от матрицы $A_{(i-1),i}$ с учетом обозначений тригонометрических функций принятых в (2.121) будут иметь вид

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_i C(b_i q_i) - \alpha_i S(b_i q_i) & -\alpha_i C(b_i q_i) - \beta_i S(b_i q_i) & -1 & (b_i - 1) q_i \\ S(b_i q_i) + \alpha_i \beta_i C(b_i q_i) & C(b_i q_i) - \alpha_i \beta_i S(b_i q_i) & -\alpha_i & (b_i - 1) q_i \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial \beta_i} = \begin{bmatrix} -\beta_i C(b_i q_i) & \beta_i S(b_i q_i) & 1 & (1-b_i)q_i \\ \alpha_i C(b_i q_i) & -\alpha_i S(b_i q_i) & \alpha_i \beta_i & (1-b_i)q_i \alpha_i \beta_i \\ -C(b_i q_i) & S(b_i q_i) & -\beta_i & (b_i-1)q_i \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} -b_i S(b_i q_i) & -b_i C(b_i q_i) & 0 & (1-b_i)\beta_i \\ b_i (C(b_i q_i) - \alpha_i \beta_i S(b_i q_i)) & -b_i (S(b_i q_i) + \alpha_i \beta_i C(b_i q_i)) & 0 & (b_i-1)\alpha_i \\ b_i (\alpha_i C(b_i q_i) + \beta_i S(b_i q_i)) & b_i (\beta_i C(b_i q_i) - \alpha_i S(b_i q_i)) & 0 & 1-b_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S(b_i q_i) - \alpha_i \beta_i C(b_i q_i) & \alpha_i \beta_i S(b_i q_i) - C(b_i q_i) & \alpha_i & (1-b_i)q_i \alpha_i \\ \beta_i C(b_i q_i) - \alpha_i S(b_i q_i) & -\alpha_i C(b_i q_i) - \beta_i S(b_i q_i) & -1 & (b_i-1)q_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \beta_i^2} = \begin{bmatrix} -C(b_i q_i) & S(b_i q_i) & -\beta_i & (b_i-1)q_i \beta_i \\ -\alpha_i \beta_i C(b_i q_i) & \alpha_i \beta_i S(b_i q_i) & \alpha_i & (1-b_i)q_i \alpha_i \\ \beta_i C(b_i q_i) & -\beta_i S(b_i q_i) & -1 & (b_i-1)q_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial q_i^2} = \begin{bmatrix} -b_i C(b_i q_i) & b_i S(b_i q_i) & 0 & 0 \\ -b_i (S(b_i q_i) + \alpha_i \beta_i C(b_i q_i)) & b_i (\alpha_i \beta_i S(b_i q_i) - C(b_i q_i)) & 0 & 0 \\ b_i (\beta_i C(b_i q_i) - \alpha_i S(b_i q_i)) & -b_i (\alpha_i C(b_i q_i) + \beta_i S(b_i q_i)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C(b_i q_i) & -S(b_i q_i) & \beta_i & (1-b_i)q_i \beta_i \\ \alpha_i C(b_i q_i) & -\alpha_i S(b_i q_i) & \alpha_i \beta_i & (1-b_i)q_i \alpha_i \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \alpha_i \partial q_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_i(\alpha_i C(b_i q_i) + \beta_i S(b_i q_i)) & b_i(\alpha_i S(b_i q_i) - \beta_i C(b_i q_i)) & 0 & b_i - 1 \\ b_i(C(b_i q_i) - \alpha_i \beta_i S(b_i q_i)) & -b_i(S(b_i q_i) + \alpha_i \beta_i C(b_i q_i)) & 0 & (b_i - 1)\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

$$\frac{\partial^2 A_{(i-1),i}}{\partial \beta_i \partial q_i} = \begin{bmatrix} b_i \beta_i S(b_i q_i) & b_i \beta_i C(b_i q_i) & 0 & 1 - b_i \\ -b_i \alpha_i S(b_i q_i) & -b_i \alpha_i C(b_i q_i) & 0 & (1 - b_i)\alpha_i \beta_i \\ b_i S(b_i q_i) & b_i C(b_i q_i) & 0 & (b_i - 1)\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.130)$$

Полученные выражения частных производных матрицы $A_{(i-1),i}$ могут быть использованы для вычисления частных производных матрицы $A_{0,k}$ при моделировании малых скручиваний в шарнирах манипуляционных систем.

2.3.2.3 Динамическая модель

Составим уравнения движения, учитывающие угловые отклонения в шарнирах манипуляционных систем. Воспользуемся методом Лагранжа – Эйлера (2.92).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \ddot{A}_{0,k}^T \right),$$

где H_k – матрица инерции k -го звена, рассматриваемого как твёрдое тело [15]; $s_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = (1, \dots, n)$ – обобщённые координаты (γ_i – основные, α_i, β_i – вспомогательные); n – число звеньев (число кинематических пар); $\text{tr}[M]$ – операция вычисления суммы диагональных элементов матрицы $[M]$.

Запишем выражение матрицы $\ddot{A}_{0,k}$. Для этого дважды продифференцируем матрицу $A_{0,k}$.

$$\ddot{A}_{0,k} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial \alpha_i} \ddot{\alpha}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial \beta_i} \ddot{\beta}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial \gamma_i} \ddot{\gamma}_i \right) +$$

(2.131)

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{array}{l} \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} \dot{\alpha}_i \dot{\beta}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \gamma_j} \dot{\alpha}_i \dot{\gamma}_j + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial \alpha_j} \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \dot{\beta}_i \dot{\beta}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial \gamma_j} \dot{\beta}_i \dot{\gamma}_j + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial \alpha_j} \dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial \beta_j} \dot{\gamma}_i \dot{\beta}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \end{array} \right).$$

Выражение (2.131) подставим в уравнение Лагранжа (2.92). Сгруппировав слагаемые и выделив векторы скоростей и ускорений обобщённых координат, представим уравнения движения в матричном виде для каждой обобщённой силы, соответствующей одной из обобщённых координат.

$$\begin{aligned} [M_i^{\alpha\alpha}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{\alpha\beta}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{\alpha\gamma}] \{\ddot{\gamma}\} + \\ + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\alpha\alpha\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\alpha\beta\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{\alpha\gamma\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \\ + 2 \left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\alpha\alpha\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\alpha\alpha\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\alpha\beta\gamma}] \{\dot{\gamma}\} \right) = Q_i^\alpha, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} [M_i^{\beta\alpha}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{\beta\beta}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{\beta\gamma}] \{\ddot{\gamma}\} + \\ + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\beta\alpha\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\beta\beta\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{\beta\gamma\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \\ + 2 \left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\beta\alpha\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\beta\alpha\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\beta\beta\gamma}] \{\dot{\gamma}\} \right) = Q_i^\beta, \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} [M_i^{\gamma\alpha}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{\gamma\beta}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{\gamma\gamma}] \{\ddot{\gamma}\} + \\ + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\gamma\alpha\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\gamma\beta\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{\gamma\gamma\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \\ + 2 \left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\gamma\alpha\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\gamma\alpha\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\gamma\beta\gamma}] \{\dot{\gamma}\} \right) = Q_i^\gamma, \end{aligned} \quad (2.134)$$

где $\{\dot{\alpha}\}, \{\ddot{\alpha}\}, \{\dot{\beta}\}, \{\ddot{\beta}\}, \{\dot{\gamma}\}, \{\ddot{\gamma}\}$ – векторы $(n \times 1)$ скоростей и ускорений вспомогательных и основных обобщённых координат; $Q_i^\alpha, Q_i^\beta, Q_i^\gamma$ – обобщённые силы, соответ-

ствующие обобщённым координатам x , y и z в i -м шарнире. Матричные коэффициенты уравнений (2.132–2.134) по структуре, аналогичны коэффициентам уравнений (2.100) и (2.101).

Таким образом, уравнения (2.132–2.134) составляют динамическую модель, учитывающую угловые отклонения, возникающие при движении манипуляционных систем со скручивающимися шарнирами. Скручивания шарниров могут быть вызваны упругой податливостью опорного для данного шарнира звена, т.е. звена, ближайшего к основанию манипуляционной системы. Упругая податливость может быть сосредоточена и в самом шарнире, являясь результатом контактного взаимодействия составляющих шарнир элементов. Существенно влияют на скручивание зазоры, имеющиеся в шарнирах.

При составлении уравнений данной динамической модели следует учитывать некоммутативность рассматриваемых угловых отклонений. Поэтому в зависимости от выбранной последовательности угловых отклонений могут быть получены соответствующие уравнения. Всего таких последовательностей – по три угловых отклонения в каждой – может быть 12: 6 последовательностей, соответствующих шарнирам Кардано, и 6 – шарнирам Эйлера.

Упругая податливость в уравнениях (2.132–2.134) может быть учтена при составлении левой части этих уравнений заданием упругой составляющей обобщённой силы.

Полученные уравнения предназначены для оценки влияния кручения шарниров на динамическую точность манипуляционных систем. Они могут быть использованы как при расчёте малых углов закручивания шарниров, так и углов – сопоставимых с изменениями обобщённых координат, задающих программное движение манипуляционной системы.

2.3.3 Моделирование линейных и угловых отклонений в шарнирах

2.3.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим методику, позволяющую одновременно моделировать линейные и угловые отклонения, возникающие в шарнирах (рис. 2.23). В данной постановке задачи шарнирные соединения звеньев манипуляционных систем моделируются кинематическими парами, имеющими шесть степеней свободы: три поступательные, учитывающие возможные линейные смещения центра шарнира, и три вращательные, учитывающие возможные угловые смещения в шарнире. Одно из возможных смещений может быть принято за основную обобщённую координату, обеспечивающую программное движение. Таким образом, общее число степеней свободы манипуляционной системы становится равным $6n$.

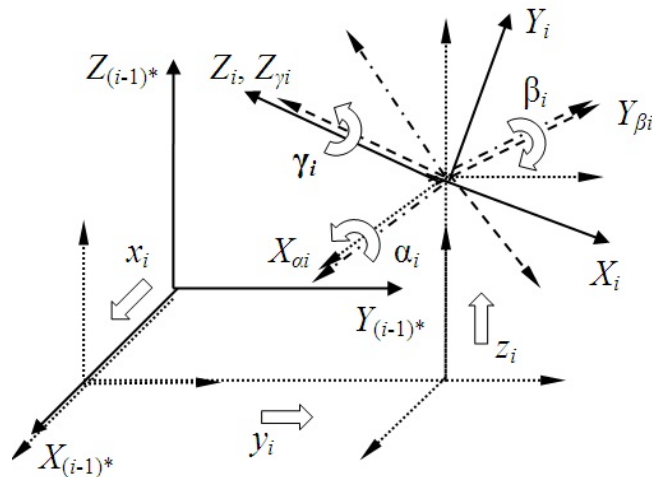


Рис. 2.23. Моделирование линейных и угловых смещений в шарнире

2.3.3.2 Динамическая модель

В уравнениях, составляющих данную математическую модель, исключены элементы, отражающие взаимовлияние степеней подвижности, тождественно равные нулю. Это существенно уменьшило вычислительные затраты при моделировании. Последовательность однородных преобразований, соответствующая представленному ниже уравнению, имеет вид

$$A_{(i-1)^*,i}(s_i) = A_{(i-1)^*,x_i}(x_i)A_{x_i,y_i}(y_i)A_{y_i,z_i}(z_i)A_{z_i,\alpha_i}(\alpha_i)A_{\alpha_i,\beta_i}(\beta_i)A_{\beta_i,\gamma_i}(\gamma_i),$$

где $s_i = (x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ – обобщённые координаты; x_i, y_i, z_i – линейные; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – угловые.

$$\begin{aligned} & [M_i^{sx}] \{\ddot{x}\} + [M_i^{sy}] \{\ddot{y}\} + [M_i^{sz}] \{\ddot{z}\} + \\ & + [M_i^{s\alpha}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{s\beta}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{s\gamma}] \{\ddot{\gamma}\} + \\ & + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{s\alpha\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{s\beta\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{s\gamma\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \\ & + 2\left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{s\alpha\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{s\alpha\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{s\beta\gamma}] \{\dot{\gamma}\}\right) + \\ & + 2\left(\{\dot{x}\}^T [C_i^{sx\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{x}\}^T [C_i^{sx\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{x}\}^T [C_i^{sx\gamma}] \{\dot{\gamma}\}\right) + \\ & + 2\left(\{\dot{y}\}^T [C_i^{sy\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{y}\}^T [C_i^{sy\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{y}\}^T [C_i^{sy\gamma}] \{\dot{\gamma}\}\right) + \\ & + 2\left(\{\dot{z}\}^T [C_i^{sz\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{z}\}^T [C_i^{sz\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{z}\}^T [C_i^{sz\gamma}] \{\dot{\gamma}\}\right) = Q_i^s. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Математическая модель включает шесть уравнений (2.135), соответствующих различным значениям линейных и угловых смещений для обобщённой координаты $s_i, i = (1, \dots, n)$.

Правая часть уравнений (2.135) представляет собой обобщённые силы в i -м шарнире по соответствующей обобщённой координате. Если обобщённая координата соответствует линейному или угловому смещению в данном шарнире, вызванному упругими деформациями, то обобщённая сила может быть задана выражением

$$Q_i^s = -w_i^s s_i - b_i^s \dot{s}_i, \quad (2.136)$$

где w_i^s и b_i^s – коэффициенты жёсткости и вязкости i -го шарнира по направлению, соответствующему s_i -й обобщённой координате.

2.4 Моделирование малых отклонений позиционирования

2.4.1 Уравнение движения с отклонениями позиционирования

2.4.1.1 Постановка задачи

В данном разделе рассматривается метод моделирования динамики манипуляционных систем роботов с упругими шарнирами при малых деформациях. Для определения возникающих при этом упругих колебаний предложено использовать численное интегрирование дифференциального уравнения, отражающего связь этих колебаний с законами изменения неупругих (основных) обобщённых координат.

Движение манипуляционных систем роботов может быть описано матричными уравнениями (1.94)

$$[M_i]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i]\{\dot{q}\} = Q_i, \quad i = (1, \dots, n),$$

где n – число степеней свободы манипуляционной системы, $\{\dot{q}\} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$ – вектор обобщённых скоростей, $\{\ddot{q}\} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$ – вектор обобщённых ускорений, Q_i – обобщённая сила, соответствующая i -ой обобщённой координате.

Матрицы коэффициентов уравнений (1.94) имеют вид:

$$[M_i^{(1 \times n)}(q)] = \sum_{k=1}^n [m_{ijk}], \quad m_{ijk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right), \quad j = (1, \dots, n);$$

$$[C_i^{(n \times n)}(q)] = \sum_{k=1}^n [c_{iljk}], \quad c_{iljk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_j} \right), \quad (l, j = (1, \dots, n)).$$

В развёрнутом виде данные матрицы представлены выражениями (1.96 и 1.97).

При формировании элементов матриц $[M_i]$ и $[C_i]$ используются матрицы инерции звеньев H_k , имеющие размерность (4×4) см. (1.58–1.64), и матрицы част-

ных производных по соответствующим обобщённым координатам от матриц преобразования однородных координат A_{0k} (1.5), также имеющих размерность (4×4) .

Решение уравнений (1.94) в виде $\{q\}=\{q(t)\}$ представляет собой движение манипуляционной системы, имеющей абсолютно твёрдые звенья и идеальные шарниры. Будем называть такое движение программным. В действительности звенья и шарниры манипуляционных систем роботов обладают упругой податливостью. Основной вклад в упругую податливость большинства промышленных роботов вносят приводы, включающие в себя исполнительные двигатели и передаточные механизмы.

Будем считать, что упругие безынерционные элементы условно сосредоточены в узлах сочленения звеньев – шарнирах. Жёсткость шарнира в такой модели может быть получена из жёсткостей реальных упругих элементов привода, установленного в данном шарнире, путём их приведения по одному из способов известных в прикладной теории упругих колебаний [4].

Под действием статических и динамических нагрузок упругие элементы деформируются, в результате чего действительный закон движения будет отличаться от программного. Величину отклонения вектора обобщённых координат от программного движения обозначим через $\{\Delta q\}=\{\Delta q(t)\}$. Данное отклонение представляет собой отклонение позиционирования, рассмотренное в п. 2.1.3. Геометрическая модель манипуляционной системы, отражающая отклонения позиционирования, может быть построена на основе выражения (2.3).

Поставим задачи:

– получить уравнения, описывающие движение манипуляционных систем роботов с учётом упругой податливости, сосредоточенной в шарнирах и учитываемой в направлении изменения соответствующей каждому шарниру обобщённой координаты;

– для случая малых отклонений на основе метода малого параметра выделить уравнения, описывающие квазистатические упругие отклонения и упругие колебания.

2.4.1.2 Вывод уравнения движения

Уравнения, описывающие движение манипуляционных систем с упругой податливостью, учитываемой в направлении изменения соответствующей данному шарниру обобщённой координаты, может быть получено из уравнений (1.94) путём замены вектора $\{q(t)\}$ на вектор $\{q(t)+\Delta q(t)\}$, учитывающий отклонения позиционирования как упругие деформации (см. п. 1.2.12)

$$[M_i(q + \Delta q)]\{\ddot{q} + \Delta\ddot{q}\} + \{\dot{q} + \Delta\dot{q}\}^T [C_i(q + \Delta q)]\{\dot{q} + \Delta\dot{q}\} = Q_i, \quad (2.137)$$

$$Q_i = Q_{Pi} + Q_{Gi} + Q_{Fi}, \quad i=(1, \dots, n),$$

где Q_{Pi} – обобщённые силы соответствующие силам упругости, Q_{Gi} и Q_{Fi} – обобщённые силы, соответствующие силам тяжести и внешним силам.

Уравнения (2.137) необходимо дополнить уравнениями, связывающими усилия развиваемые приводами Q_{Di} и силы упругости, возникающие в передаточных механизмах этих приводов. Если массой упругих элементов можно пренебречь, а упругая сила линейно зависит от Δq_i , то эти уравнения будут иметь вид

$$Q_{Di} = Q_{Pi} = -w_i \Delta q_i, \quad i = (1, \dots, n), \quad (2.138)$$

где w_i – приведенный коэффициент жёсткости i -го шарнира.

Уравнения (2.138) дополняют уравнения (2.137) до системы уравнений разрешимой относительно обобщённых координат Δq_i , $i=(1, \dots, n)$. Совместно уравнения 1.94 и 2.137, 2.138) представляют собой систему уравнений, описывающих движение манипуляционных систем роботов по жёстким q_i и упругим Δq_i , $i=(1, \dots, n)$ обобщённым координатам.

Если жёсткости упругих шарниров w_i достаточно велики, то возникающие в них упругие деформации, определяющие упругие координаты Δq_i , можно считать малыми величинами. В этом случае при вычислении элементов матричных коэффициентов уравнения (1.94), зависящих от составных переменных $(q_i + \Delta q_i)$, приходится складывать величины разного порядка малости. Исключить сложение ве-

личин разного порядка малости можно разложением левой и правой частей этого уравнения в ряд Тейлора.

$$[M_i(q + \Delta q)] = [M_i(q)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial [M_i(q)]}{\partial q_k} \Delta q_k + O(\Delta q^2) = [M_i(q)] + O(\Delta q), \quad (2.139)$$

$$[C_i(q + \Delta q)] = [C_i(q)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial [C_i(q)]}{\partial q_k} \Delta q_k + O(\Delta q^2) = [C_i(q)] + O(\Delta q), \quad (2.140)$$

$$Q_i(q + \Delta q) = Q_i(q) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial Q_i(q)}{\partial q_k} \Delta q_k + O(\Delta q^2) = Q_i(q) + O(\Delta q). \quad (2.141)$$

Отбрасывание линейных членов в разложениях (2.139–2.141) обосновывается слабой зависимостью раскладываемых в ряд функций от изменения обобщённых координат q_i . Данный факт необходимо считать допущением данного метода, согласующимся с натурными исследованиями.

Детальный анализ, основывающийся на свойствах матриц преобразования координат, показывает, что в соответствии с (1.94) элементы матриц коэффициентов $[M_i(q)]$ и $[C_i(q)]$ будут пропорциональны величинам, получаемым поэлементным умножением матриц $\partial A_{0,k} / \partial q_i$ и $\partial A_{0,k}^T / \partial q_i$ ($\partial^2 A_{0,k}^T / \partial q_i \partial q_j$). Учитывая структуру матриц $A_{0,k}$, являющихся матрицами преобразования однородных координат, можно положить, что элементы рассматриваемых матриц коэффициентов будут пропорциональны выражениям: $\sin^2 q_i$, $\cos^2 q_i$, $\sin q_i \cos q_i$. Если положить, что $q_i \rightarrow q_i + \Delta q_i$, а $\Delta q_i \ll 1$, то, например,

$$\sin^2(q_i + \Delta q_i) = \sin^2 q_i + 2\Delta q_i \sin q_i \cos q_i + O(\Delta q_i^2) = \sin^2 q_i + O(\Delta q_i).$$

Аналогичное разложение можно получить и для двух других тригонометрических выражений. Таким образом, точность приближения, обеспечиваемая функциями (2.139–2.141), определяется величиной множителя

$$2\Delta q_i \sin q_i \cos q_i$$

в котором $\Delta q_i \ll 1$, $\sin q_i \leq 1$, $\cos q_i \leq 1$.

Подставим (2.139–2.141) в уравнения (2.137), получим

$$[M_i(q)]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{q}\} + [M_i(q)]\{\Delta\ddot{q}\} + 2\{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\Delta\dot{q}\} + \{\Delta\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\Delta\dot{q}\} = Q_i. \quad (2.142)$$

Примем ещё одно допущение, заключающееся в том, что $\Delta\dot{q}_i$, как и Δq_i , являются величинами одного порядка малости. Тогда последним слагаемым в левой части уравнения (2.142) можно пренебречь, как величиной более высокого порядка малости.

С учётом сделанных допущений получим уравнения эквивалентные уравнениям (2.137) в виде

$$[M_i(q)]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{q}\} + [M_i(q)]\{\Delta\ddot{q}\} + 2\{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\Delta\dot{q}\} = Q_i, i=(1, \dots, n). \quad (2.143)$$

Уравнения (2.143) имеют преимущества перед уравнениями (2.137), так как при использовании уравнений (2.143) не требуется складывать величины разных порядков малости.

2.4.1.3 Свободные упругие колебания

Уравнения свободных упругих колебаний манипуляционной системы около положения статического равновесия можно получить из уравнений (2.143) при условии $\{\dot{q}\} = 0$, $\{\ddot{q}\} = 0$ и $Q_i = -w_i \Delta q_i^d$, $i = (1, \dots, n)$. $\{\Delta q^d\} = [\Delta q_1^d, \Delta q_2^d, \dots, \Delta q_n^d]$ – вектор упругих деформаций, соответствующих свободным колебаниям.

$$[M_i]\{\Delta\ddot{q}^d\} + w_i \Delta q_i^d = 0, i=(1, \dots, n). \quad (2.144)$$

Уравнения (2.144) можно преобразовать к матричному виду

$$[M]\{\Delta\ddot{q}^d\} + [W]\{\Delta q^d\} = 0 \quad (2.145)$$

где $[W] = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ – диагональная матрица жёсткости.

Общее решение уравнения (2.145) может быть записано в виде

$$\{\Delta q^d\} = \sum_{l=1}^n d_l \{h_l\} \cos(k_l t + \varphi_l), \quad (2.146)$$

где k_l – собственные частоты, $\{h_l\}$ – собственные формы, d_l, φ_l – постоянные величины, определяемые из начальных условий $\{\Delta q^d(t)\} = \{\Delta q^d(0)\}$, $\{\Delta \dot{q}^d(t)\} = \{\Delta \dot{q}^d(0)\}$.

2.4.2 Динамическая модель для анализа малых отклонений позиционирования

2.4.2.1 Декомпозиция уравнения движения

Необходимо отметить, что уравнения (2.137 и 2.143) имеют общий недостаток, они содержат две группы переменных. Одна группа переменных – $q_i, i=(1, \dots, n)$ определяет программное движение манипуляционной системы. Другая группа переменных – $\Delta q_i, i=(1, \dots, n)$ – отражает малые упругие отклонения от программного движения. На практике чаще приходится анализировать каждое из этих движений в отдельности. Кроме того, при численном интегрировании этих дифференциальных уравнений приходится с малым шагом вычислять высокочастотные составляющие на больших временных интервалах.

Сопоставим переменные, относящиеся к разным группам. Переменные q_i – обобщённые координаты, определяющие траекторию движения жёсткой манипуляционной системы, а переменные Δq_i , представляют собой малые упругие отклонения этих обобщённых координат $\Delta q_i \ll q_i, i=(1, \dots, n)$, кроме того будем считать, что $\Delta \dot{q}_i \ll \dot{q}_i$ и $\Delta \ddot{q}_i \ll \ddot{q}_i$.

Введём общий малый параметр ε для переменных $\Delta q, \Delta \dot{q}_i$ и $\Delta \ddot{q}_i$. Тогда

$$\Delta q_i = \varepsilon S_i, \Delta \dot{q}_i = \varepsilon \dot{S}_i, \Delta \ddot{q}_i = \varepsilon \ddot{S}_i, \quad (2.147)$$

где $S_i = O(1), \dot{S}_i = O(1), \ddot{S}_i = O(1), 0 < \varepsilon \ll 1, i=(1, \dots, n)$.

Подставим соотношения (2.147) в уравнение (2.142)

$$\begin{aligned}
[M_i(q)]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{q}\} + \varepsilon [M_i(q)]\{\ddot{S}\} + 2\varepsilon \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{S}\} + \varepsilon^2 \{\dot{S}\}^T [C_i(q)]\{\dot{S}\} = \\
= Q_{Di}(q) + Q_{Gi}(q) + Q_{Fi}(q), i=(1, \dots, n).
\end{aligned} \quad (2.148)$$

Положив малый параметр равным нулю $\varepsilon = 0$, получим вырожденное по отношению к (2.148) уравнение

$$[M_i(q)]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{q}\} = Q_{Di}(q) + Q_{Gi}(q) + Q_{Fi}(q), i=(1, \dots, n). \quad (2.149)$$

Уравнение (2.149) представляет собой уравнение (1.94), описывающее движение неупругой (жесткой) манипуляционной системы по программной траектории $q_i(t)$, $i=(1, \dots, n)$. Это уравнение является приближением уравнения (2.148) при малом параметре, стремящемся к нулю.

Полная упругая деформация в шарнирах Δq может быть представлена как сумма квазистатической упругой деформации Δq^{ks} и упругих колебаний Δq^d относительно квазистатического положения:

$$\Delta q_i = \Delta q_i^{ks} + \Delta q_i^d, i=(1, \dots, n). \quad (2.150)$$

Подставим (2.149) в уравнение (2.138), получим

$$Q_{Di} = -w_i (\Delta q_i^{ks} + \Delta q_i^d), i=(1, \dots, n). \quad (2.151)$$

Из (2.151) сначала выразим Δq_i^d , затем Δq_i^{ks} и, продифференцировав оба уравнения, запишем их правые части в операторной форме, введя оператор дифференцирования $p = d/dt$. Получим

$$\frac{d}{dt} \Delta q_i^d = -p \left(\Delta q_i^{ks} + \frac{Q_{Di}}{w_i} \right), \quad \frac{d}{dt} \Delta q_i^{ks} = -p \left(\Delta q_i^d + \frac{Q_{Di}}{w_i} \right). \quad (2.152)$$

Представим полученные уравнения в безразмерном виде. Для этого запишем выражения для всех входящих в них величин в числовых мерах.

$$t = \tau T, \quad \Delta q_i^d = \Delta_i^d \Delta^d, \quad \Delta q_i^{ks} = \Delta_i^{ks} \Delta^{ks}, \quad w_i = W_i W, \quad Q_{Di} = D_i D, \quad (2.153)$$

где $\tau, \Delta_i^d, \Delta_i^{ks}, W_i, D_i$ – характерные значения соответствующих величин, а $T, \Delta^d, \Delta^{ks}, W, D$ – размерности этих величин.

Подставим в уравнения (2.152) выражения в числовых мерах вместо входящих в них величин и поделим уравнения на комбинацию множителей, определяющих размерности их правых частей. Получим безразмерную форму данных уравнений

$$\frac{1}{T} \frac{d}{d\tau} \Delta_i^d = -p \left(\Delta_i^{ks} + \frac{D_i}{W_i} \right), \quad \frac{1}{T} \frac{d}{d\tau} \Delta_i^{ks} = -p \left(\Delta_i^d + \frac{D_i}{W_i} \right). \quad (2.154)$$

Введём характерные значения для соответствующих интервалов времени. T^d – для упругих колебаний и T^{ks} – для квазистатических упругих деформаций. Нормализуем полученные уравнения по времени, получим

$$\frac{T^d}{T} \frac{d}{d\tau} \Delta_i^d = -T^d p \left(\Delta_i^{ks} + \frac{D_i}{W_i} \right), \quad \frac{T^{ks}}{T} \frac{d}{d\tau} \Delta_i^{ks} = -T^{ks} p \left(\Delta_i^d + \frac{D_i}{W_i} \right). \quad (2.155)$$

Будим рассматривать движение манипуляционной системы на временах порядка $T = O(1)$, выберем $T = T^{ks}$. Поскольку $T^d \ll T^{ks}$ введем малый параметр μ :

$$\mu = \frac{T^d}{T^{ks}} \ll 1. \quad (2.156)$$

Выполнив подстановку (2.156) в (2.155) получим

$$\mu \frac{d}{d\tau} \Delta_i^d = -T^d p \left(\Delta_i^{ks} + \frac{D_i}{W_i} \right), \quad \frac{d}{d\tau} \Delta_i^{ks} = -T^{ks} p \left(\Delta_i^d + \frac{D_i}{W_i} \right). \quad (2.157)$$

Производные $d\Delta_i^d / d\tau \cong 1/\mu$, а $d\Delta_i^{ks} / d\tau \cong 1$, поэтому Δ_i^d – быстрая, а Δ_i^{ks} – медленная переменные. Систему уравнений (2.157) с малым параметром μ называют сингулярно возмущённой. Положив малый параметр равным нулю ($\mu = 0$), получим систему уравнений невозмущённую по отношению к (2.157).

$$0 = -T^d p \left(\Delta_i^{ks} + \frac{D_i}{W_i} \right), \quad \frac{d}{d\tau} \Delta_i^{ks} = -T^{ks} p \left(\Delta_i^d + \frac{D_i}{W_i} \right). \quad (2.158)$$

Решив первое уравнение (2.158) и перейдя к размерной форме представления величин, получим уравнение

$$Q_{Di} = -w_i \Delta q_i^{ks} + O(\mu), \quad (2.159)$$

которое представляет собой квазистатическое решение уравнения (2.148).

Подставив (2.156) в уравнение (2.146) получим уравнение, описывающее движение манипуляционных систем с упругими шарнирами по медленным переменным q и Δq^{ks} :

$$[M_i(q)]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{q}\} = -w_i \Delta q_i^{ks} + Q_{Gi} + Q_{Fi}, \quad i=(1, \dots, n). \quad (2.160)$$

Подставим (2.151) в уравнение (2.142), получим

$$\begin{aligned} [M_i(q)]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\dot{q}\} + [M_i(q)]\{\Delta \ddot{q}\} + 2\{\dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\Delta \dot{q}\} + \{\Delta \dot{q}\}^T [C_i(q)]\{\Delta \dot{q}\} = \\ = -w_i (\Delta q_i^{ks} + \Delta q_i^d) + Q_{Gi} + Q_{Fi}, \quad i=(1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.161)$$

И наконец, вычтем уравнение (2.160) из уравнения (2.161), получим уравнение

$$[M_i(q)]\{\Delta \ddot{q}^d\} + 2\{\dot{q}^d\}^T [C_i(q)]\{\Delta \dot{q}^d\} + \{\Delta \dot{q}^d\}^T [C_i(q)]\{\Delta \dot{q}^d\} = -w_i \Delta q_i^d, \quad i=(1, \dots, n). \quad (2.162)$$

Уравнения (2.162) описывают малые упругие колебания, возникающие в шарнирах манипуляционных систем.

Рассмотрим уравнение (2.162) свободных упругих колебаний, возникающих около положения статического равновесия при остановке манипуляционных систем

$$[M_i(q)]\{\Delta \ddot{q}^d\} + w_i \Delta q_i^d = 0, \quad i=(1, \dots, n).$$

Общее решение этого уравнения как было указано ранее см. (2.146) может быть записано в гармоническом виде

$$\{\Delta q^d\} = \sum_{l=1}^n d_l \{h_l\} \cos(k_l t + \varphi_l),$$

где k_l – собственные частоты, $\{h_l\}$ – собственные формы, d_l , φ_l – постоянные величины, определяемые из начальных условий $\{\Delta q^d(t)\} = \{\Delta q^d(0)\}$, $\{\Delta \dot{q}^d(t)\} = \{\Delta \dot{q}^d(0)\}$.

Тогда скорости изменения упругих координат $\{\Delta \dot{q}^d(t)\}$ будут иметь вид

$$\{\Delta \dot{q}^d\} = -\sum_{l=1}^n k_l d_l \{h_l\} \sin(k_l t + \varphi_l). \quad (2.163)$$

Для манипуляционных систем роботов жёсткости w_i в шарнирах составляют 10^4 – 10^6 Н/м, амплитуды упругих колебаний имеют обратный порядок 10^{-4} – 10^{-6} м, а собственные частоты $k_l \sim \sqrt{w_i}$ соответственно 10^2 – 10^3 с⁻¹. Амплитуды скоростей упругих колебаний согласно (2.163) составят 10^{-2} – 10^{-3} м/с, а их квадраты соответственно 10^{-4} – 10^{-6} . Поэтому влияние компоненты $\{\Delta \dot{q}^d\}^T [C_i(q)] \{\Delta \dot{q}^d\}$ в левой части уравнения (2.162) может быть сопоставимо по порядку величины с влиянием других составляющих этого уравнения. Однако при наличии демпфирования высокочастотные гармоники быстро затухают.

Таким образом, окончательно уравнения малых упругих колебаний, возникающих в шарнирах манипуляционных систем, будут иметь вид

$$[M_i(q)] \{\Delta \ddot{q}^d\} + 2 \{\dot{q}^d\}^T [C_i(q)] \{\Delta \dot{q}^d\} = -w_i \Delta q_i^d - b_i \Delta \dot{q}_i^d, \quad i=(1, \dots, n). \quad (2.164)$$

b_i – коэффициент вязкости в i -м шарнире.

2.4.2.2 Динамическая модель

Окончательно динамическая модель манипуляционных систем с упругими шарнирами при малых деформациях может быть представлена системой уравнений (1.94, 2.164 и 2.159)

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_i(q)] \{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T [C_i(q)] \{\dot{q}\} = Q_{Di} + Q_{Gi} + Q_{Fi}, \quad i=(1, \dots, n); \\ [M_i(q)] \{\Delta \ddot{q}^d\} + 2 \{\dot{q}^d\}^T [C_i(q)] \{\Delta \dot{q}^d\} = -w_i \Delta q_i^d - b_i \Delta \dot{q}_i^d, \quad i=(1, \dots, n); \\ Q_{Di} = -w_i \Delta q_i^{ks}, \quad i=(1, \dots, n). \end{array} \right. \quad (2.165)$$

Если для описания динамики жёсткой манипуляционной системы использовать альтернативное уравнение (1.95) то можно показать, что динамическая модель манипуляционной системы с упругими шарнирами при малых деформациях может быть представлена системой уравнений

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{q}\} + [S]\{\dot{q}^2\} + 2[K]\{\dot{q}_i \dot{q}_j\} = \{Q_D\} + \{Q_G\} + \{Q_F\}, \quad i \neq j \quad (i, j = (1, \dots, n)), \\ [M]\{\Delta \ddot{q}^d\} + 2[S]\{\dot{q} \Delta \dot{q}^d\} + 2[K]\{\dot{q}_i \Delta \dot{q}_j^d + \dot{q}_j \Delta \dot{q}_i^d\} = -[W]\{\Delta q_i^d\} - [B]\{\Delta \dot{q}_i^d\}, \\ \{Q_D\} = -[W]\{\Delta q^{ks}\}. \end{cases} \quad (2.166)$$

В системе уравнений (2.166) использованы $[W]$ и $[B]$ – матрицы жёсткости и вязкости манипуляционной системы. Данные матрицы являются положительно определёнными и симметричными, в частном случае, определяемом выражением (2.164), матрицы являются диагональными.

2.4.2.3 Методика моделирования

Моделирование движения манипуляционных систем с упругими шарнирами на основе полученных динамических моделей может быть выполнено в следующей последовательности. Сначала, по заданной программной траектории $\{q(t)\}$, на основе первого уравнения системы, определяются необходимые движущие усилия в приводах Q_{Di} . На основе второго уравнения, по заданным $\{q(t)\}$ и начальным условиям $\{\Delta q^d(t)\} = \{\Delta q^d(0)\}$, $\{\Delta \dot{q}^d(t)\} = \{\Delta \dot{q}^d(0)\}$, определяются упругие колебания $\{\Delta q^d(t)\}$. Затем, из третьего уравнения определяются квазистатические отклонения $\{\Delta q^{ks}(t)\}$. Полное упругое отклонение от заданной программной траектории движения манипуляционной системы определяется суммированием $\{\Delta q(t)\} = \{\Delta q^d(t)\} + \{\Delta q^{ks}(t)\}$.

2.4.2.4 Оценка точности динамической модели

Сравним результаты численного моделирования динамики манипуляционных систем с упругими шарнирами, получаемые с использованием динамической модели (2.166) и уравнения (см. также (2.137))

$$\begin{aligned} & [M(q + \Delta q)]\{\ddot{q} + \Delta\ddot{q}\} + [S(q + \Delta q)]\{(\dot{q} + \Delta\dot{q})^2\} + \\ & + 2[K(q + \Delta q)]\left\{(\dot{q}_i + \Delta\dot{q}_j)(\dot{q}_j + \Delta\dot{q}_i)\right\}_{i \neq j} = \\ & = \{Q_P(\Delta q)\} + \{Q_G(q + \Delta q)\} + \{Q_F(q + \Delta q)\}, \end{aligned} \quad (2.167)$$

где $\{Q_P\}$ – вектор обобщённых сил, соответствующих силам упругости.

$$\{Q_P\} = -[W]\{\Delta q\}, \quad (2.168)$$

где $[W]$ – матрица жёсткости манипуляционной системы.

Моделирование проведём на примере трёхзвенной манипуляционной системы (рис. 2.24).

Первое звено исследуемой манипуляционной системы моделируется тонкостенной трубой длиной l_1 с радиусом R_1 и массой m_1 , вращающейся вокруг вертикальной оси, совпадающей с центральной продольной осью трубы. Второе звено моделируется тонким стержнем длиной $2l_2$ и массой m_2 , и может вращаться относительно первого звена в вертикальной плоскости. Третье звено движется поступательно относительно второго звена и имеет длину l_3 и массу m_3 , сосредоточенную на конце звена.

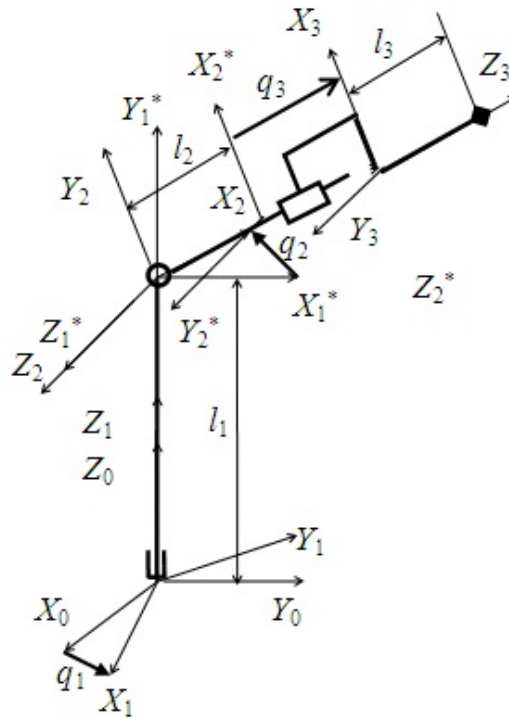


Рис. 2.24. Кинематическая схема

Исследуем отклонения движения манипуляционной системы, рассмотрев прямолинейное равноускоренное движение точки, связанной с сосредоточенной массой m_3 третьего звена. Примем за начальную точку траектории движения точку с декартовыми координатами $(x(0), y(0), z(0)) = (0.6, 0.0, 0.0)$, а за конечную – точку $(x(T), y(T), z(T)) = (0.0, 0.6, 1.2)$, где $T = 2$ с – время движения. Решив обратную задачу кинематики, найдём закон движения исследуемой манипуляционной системы по заданной траектории (рис. 2.25).

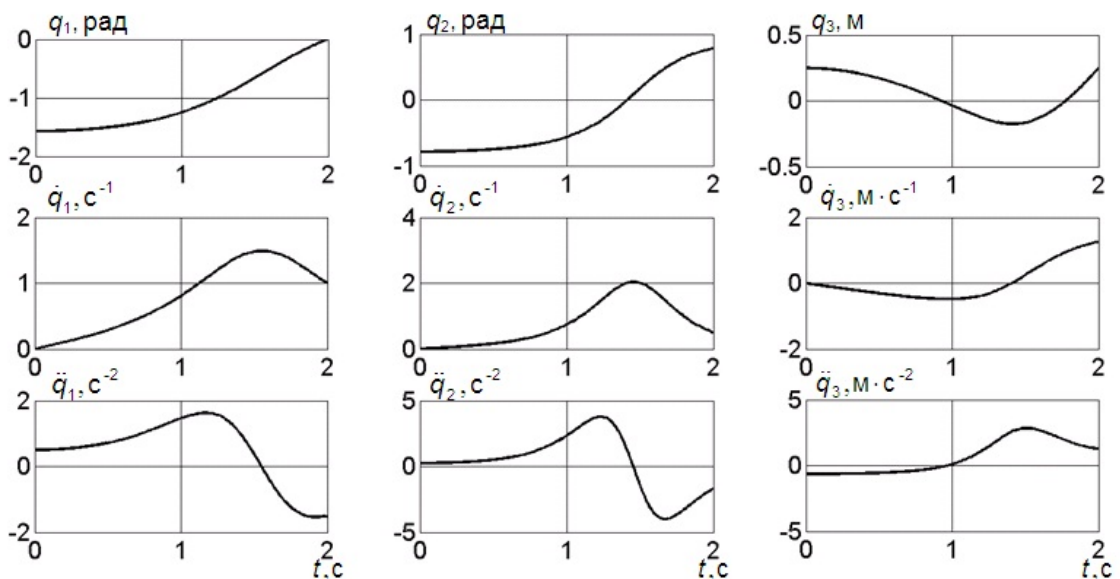


Рис. 2.25. Закон движения

Опуская преобразования, приведём аналитические выражения для матриц $[M]$, $[S]$, $[K]$ и вектора $\{Q_G\}$, входящих в (2.166).

$$[M(q)] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}, \quad [S(q)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K(q)] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$m_{11}(q) = m_1 R_1^2 + \left(\frac{4}{3} m_2 l_2^2 + m_3 (l_2 + l_3 + q_3)^2 \right) \cos^2 q_2;$$

$$m_{22}(q) = \frac{4}{3} m_2 l_2^2 + m_3 (l_2 + l_3 + q_3)^2; \quad m_{33}(q) = m_3 = \text{Const};$$

$$s_{21}(q) = \left(\frac{4}{3} m_2 l_2^2 + m_3 (l_2 + l_3 + q_3)^2 \right) \sin q_2 \cos q_2;$$

$$s_{31}(q) = -m_3 (l_2 + l_3 + q_3) \cos^2 q_2; \quad s_{32}(q) = -m_3 (l_2 + l_3 + q_3);$$

$$k_{11}(q) = - \left(\frac{2}{3} m_2 l_2^2 \sin q_2 + m_3 (l_2 + l_3 + q_3)^2 \sin q_1 \right) \cos q_2;$$

$$k_{12}(q) = m_3 (l_2 + l_3 + q_3) \cos^2 q_2; \quad k_{23}(q) = m_3 (l_2 + l_3 + q_3).$$

В представленные выражения не вошла длина первого звена l_1 , так как момент инерции этого звена относительно оси его вращения не зависит от данного параметра.

$$\{Q_G(q)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ - (m_2 l_2 + m_3 (l_2 + l_3 + q_3)) g \cos q_2 \\ - m_3 g \sin q_2 \end{bmatrix}. \quad (2.169)$$

Уравнения, соответствующие математической модели, определяемой системой уравнений (2.166), для исследуемой трёхзвенной манипуляционной системы будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11}(q)\ddot{q}_1 + 2k_{11}(q)\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2k_{12}(q)\dot{q}_1\dot{q}_3 = -w_1\Delta q_1^{ks}; \\ m_{22}(q)\ddot{q}_2 + s_{21}(q)\dot{q}_1^2 + 2k_{23}(q)\dot{q}_2\dot{q}_3 = -w_2\Delta q_2^{ks} + Q_{G2}(q); \\ m_{33}(q)\ddot{q}_3 + s_{31}(q)\dot{q}_1^2 + s_{32}(q)\dot{q}_2^2 = -w_3\Delta q_3^{ks} + Q_{G3}(q); \\ m_{11}(q)\Delta\ddot{q}_1^d + 2k_{11}(q)(\dot{q}_1\Delta\dot{q}_2^d + \dot{q}_2\Delta\dot{q}_1^d) + 2k_{12}(q)(\dot{q}_1\Delta\dot{q}_3^d + \dot{q}_3\Delta\dot{q}_1^d) = -w_1\Delta q_1^d; \\ m_{22}(q)\Delta\ddot{q}_2^d + 2s_{21}(q)\dot{q}_1\Delta\dot{q}_1^d + 2k_{23}(q)(\dot{q}_2\Delta\dot{q}_3^d + \dot{q}_3\Delta\dot{q}_2^d) = -w_2\Delta q_2^d; \\ m_{33}(q)\Delta\ddot{q}_3^d + 2s_{31}(q)\dot{q}_1\Delta\dot{q}_1^d + 2s_{32}(q)\dot{q}_2\Delta\dot{q}_2^d = -w_3\Delta q_3^d. \end{array} \right. \quad (2.170)$$

Уравнения, соответствующие математической модели (2.167) и (2.168), будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11}(q + \Delta q)(\ddot{q}_1 + \Delta\ddot{q}_1) + 2k_{11}(q + \Delta q)(\dot{q}_1 + \Delta\dot{q}_1)(\dot{q}_2 + \Delta\dot{q}_2) + \\ \quad + 2k_{12}(q + \Delta q)(\dot{q}_1 + \Delta\dot{q}_1)(\dot{q}_3 + \Delta\dot{q}_3) = -w_1\Delta q_1; \\ m_{22}(q + \Delta q)(\ddot{q}_2 + \Delta\ddot{q}_2) + s_{21}(q + \Delta q)(\dot{q}_1 + \Delta\dot{q}_1)^2 + \\ \quad + 2k_{23}(q + \Delta q)(\dot{q}_2 + \Delta\dot{q}_2)(\dot{q}_3 + \Delta\dot{q}_3) = -w_2\Delta q_2 + Q_{G2}(q + \Delta q); \\ m_{33}(q + \Delta q)(\ddot{q}_3 + \Delta\ddot{q}_3) + s_{31}(q + \Delta q)(\dot{q}_1 + \Delta\dot{q}_1)^2 + \\ \quad + s_{32}(q + \Delta q)(\dot{q}_2 + \Delta\dot{q}_2)^2 = -w_3\Delta q_3 + Q_{G3}(q + \Delta q). \end{array} \right. \quad (2.171)$$

Зададим числовые значения геометрических, инерционных и упругих параметров исследуемой манипуляционной системы, а также начальные значения для переменных интегрирования.

Примем: $R_1=0,1$ м, $l_1=0,6$ м, $l_2=0,3$ м, $l_3=0,3$ м, $m_1=20$ кг, $m_2=10$ кг, $m_3=10$ кг, $w_1=10000$ Н·м, $w_2=10000$ Н·м, $w_3=100000$ Н·м⁻¹, $\Delta q_i^d(0)=0,0$ ($i=1\dots3$), $\Delta \dot{q}_1^d(0) = \dot{q}_1(0,01) = 0,0075$ с⁻¹, $\Delta \dot{q}_2^d(0) = \dot{q}_2(0,01) = 0,0038$ с⁻¹, $\Delta \dot{q}_3^d(0) = \dot{q}_3(0,01) = -0,0095$ м с⁻¹, $\Delta q_1(0) = \Delta q_1^{ks}(0,01) = -0,00022$ м, $\Delta q_2(0) = \Delta q_2^{ks}(0,01) = -0,0082$ м, $\Delta q_3(0) = \Delta q_3^{ks}(0,01) = 0,00076$ м, $\Delta \dot{q}_i(0) = \Delta \dot{q}_i^d(0)$ ($i=1\dots3$).

Интегрирование дифференциальных уравнений выполнялось методом Рунге-Кутты четвёртого порядка. Результаты расчётов представлены тремя графиками (рис. 2.26–2.28). График 1 соответствует зависимости, отражающей сумму квазистатической и колебательной составляющих малых упругих отклонений $\Delta q_i^{ks}(t) + \Delta q_i^d(t)$ ($i=1\dots3$). График 2 представляет зависимость $\Delta q_i^{ks}(t)$ ($i=1\dots3$). Зависимости, представленные на графиках 1 и 2, рассчитаны на основе системы уравнений (2.170). График 3 соответствует зависимости $\Delta q_i(t)$ ($i=1\dots3$), рассчитанной на основе системы уравнений (2.171). Сравниваются графики 1 и 3.

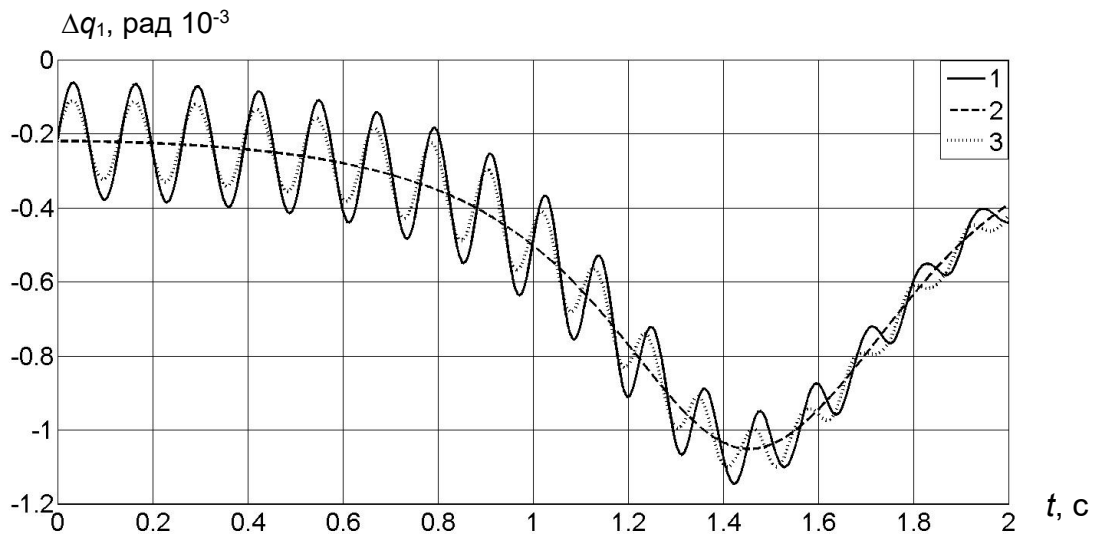


Рис. 2.26. $(\Delta q_1^{ks} + \Delta q_1^d) - 1, \Delta q_1^{ks} - 2, \Delta q_1 - 3$

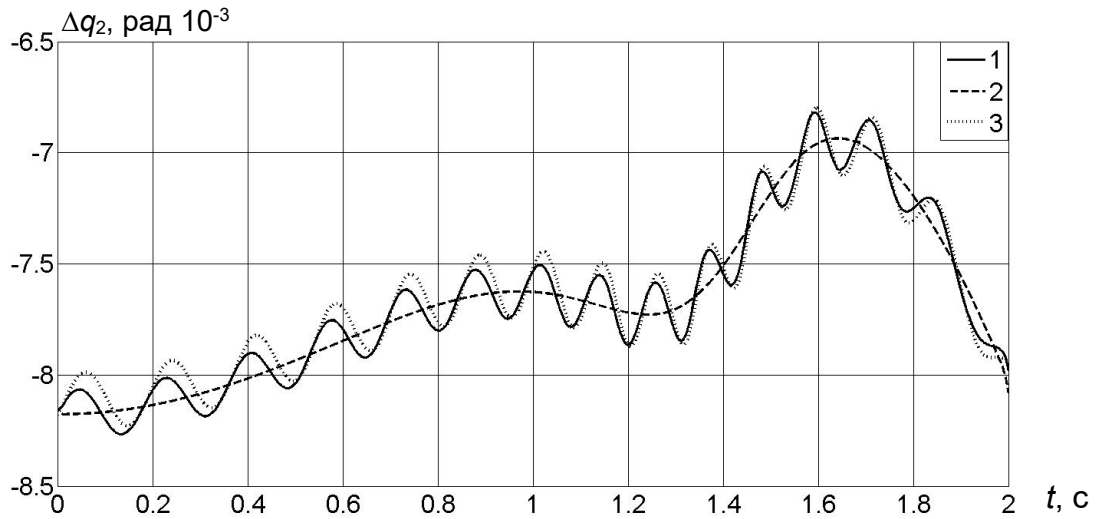


Рис. 2.27. $(\Delta q_2^{ks} + \Delta q_2^d) - 1, \Delta q_2^{ks} - 2, \Delta q_2 - 3$

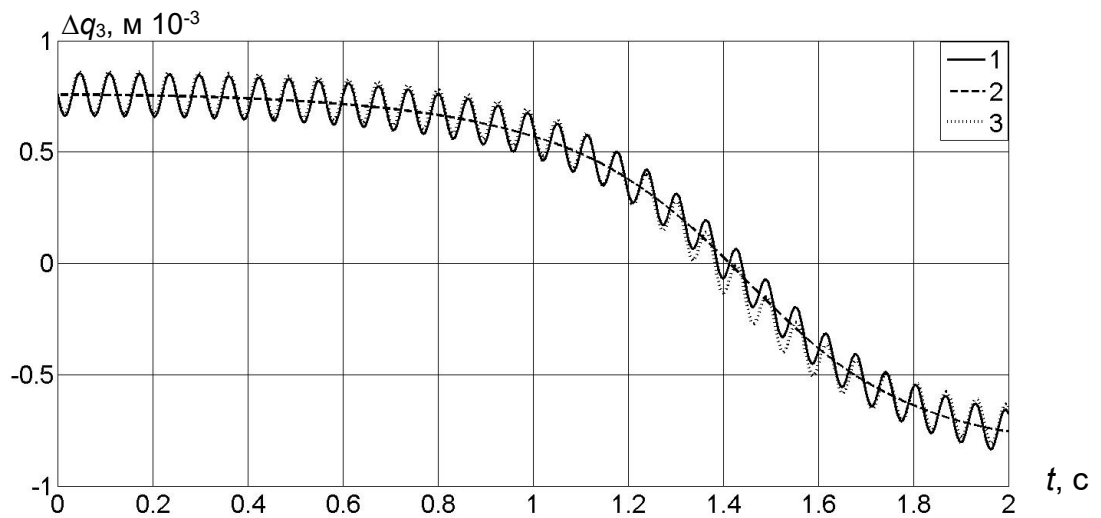


Рис. 2.28. $(\Delta q_3^{ks} + \Delta q_3^d) - 1, \Delta q_3^{ks} - 2, \Delta q_3 - 3$

2.5 Выводы

Важным требованием к разрабатываемым моделям любых сложных систем является обеспечение адекватности модели. В математических моделях требование адекватности сводится к обеспечению точности моделирования соответствующих параметров (характеристик). При моделировании кинематики и динамики манипуляционных систем роботов требование адекватности может быть сформулировано как требование соответствия с заданной точностью параметров, вычис-

ляемых на основе соответствующих математических моделей, исследуемым параметрам реальных манипуляционных систем.

Обеспечение требуемой адекватности математических моделей ставит задачи по определению факторов, влияющих на точность вычисляемых параметров, и способов модификации математических моделей с целью учёта дополнительных факторов. Анализ факторов, влияющих на точность моделирования движения манипуляционных систем роботов позволил выделить основные из них. К ним относятся геометрические отклонения размеров звеньев и, так называемые, отклонения позиционирования.

Геометрические отклонения размеров звеньев можно разделить на несколько групп. К первой группе можно отнести первичные геометрические (линейные и угловые) отклонения звеньев, возникающие при их изготовлении и сборке. Также к этой группе можно отнести геометрические отклонения звеньев, возникающие при эксплуатации манипуляционных систем, связанные с их износом и повреждением. Данные отклонения могут быть определены метрологическим путём с использованием специальных средств измерения. Параметризация математических моделей, позволяющая учитывать в них измеряемые отклонения, способствует повышению точности вычисления исследуемых с их помощью параметров манипуляционных систем.

Ко второй группе можно отнести изменения геометрических размеров звеньев, зависящие от изменения температуры окружающей среды.

При необходимости могут быть учтены геометрические отклонения звеньев, возникающие из-за их упругой податливости, эти отклонения можно отнести к третьей группе. Однако к конструкции звеньев большинства манипуляционных роботов закладываются высокие требования по их жёсткости, поэтому, возникающие в них упругие деформации не вносят существенный вклад в измеряемые геометрические отклонения звеньев.

Отклонения позиционирования представляют собой отклонения обобщённых (шарнирных) координат. Как было отмечено в данной работе, отклонения позиционирования могут иметь различную природу. Ощутимый вклад в эти откло-

нения вносят зазоры в шарнирах и передаточных механизмах, а также упругая податливость некоторых элементов этих механизмов. В некоторых случаях необходимо учитывать процессы, связанные с преобразованием того или иного вида энергии, в механическую работу, протекающие в двигателях приводов.

Для учёта первичных геометрических отклонений разработано несколько способов модификации геометрических моделей манипуляционных систем. Предложены варианты математических моделей, соответствующих параметризованной геометрической модели, а также модифицированной и альтернативной геометрическим моделям. Важным обстоятельством является то, что альтернативная геометрическая модель может быть получена из номинальной геометрической модели путём воздействия на неё специального модификатора, содержащего измеряемые геометрические (линейные и угловые) отклонения.

Таким образом, сформулированная ранее методологическая концепция моделирования кинематики манипуляционных систем роботов может быть расширена на основе разработанных методов модификации геометрических моделей, позволяющих учитывать в этих моделях измеряемые геометрические отклонения звеньев. Расширенная таким образом концепция моделирования может быть проиллюстрирована понятийной последовательностью: манипуляционная система \rightarrow номинальная геометрическая модель \times модификатор геометрических отклонений = параметризованная геометрическая модель \rightarrow моделирование кинематики (К-моделирование).

Важной задачей, связанной с моделированием кинематики манипуляционных систем, является коррекция интегральных отклонений движения этих систем. Интегральные отклонения манипуляционных систем представляют собой отклонения траекторий движения характерных точек звеньев и отклонения ориентации самих звеньев от заданной (программной) траектории движения, вызванные наличием геометрических отклонений звеньев и отклонений позиционирования. Интегральные отклонения могут быть исключены при моделировании, если для построения программных траекторий использовать параметризованные геометрические модели, уточнённые измеренными значениями геометрических отклонений.

Однако при практическом моделировании движения манипуляционных систем роботов часто приходится использовать законы изменения обобщённых (шарнирных) координат, полученные путём решения обратной задачи кинематики для номинальной манипуляционной системы и заданной программной траектории. Под номинальной манипуляционной системой следует понимать её геометрическую модель, составленную на основе данных конструкторской документации, например, на основе 3D-модели. Для таких случаев разработан метод коррекции интегральных отклонений, представленный в данной работе.

Использование при моделировании манипуляционных систем параметризованных геометрических моделей, уточнённых измеренными значениями неизменяющихся геометрических отклонений, тем ни менее не всегда обеспечивает достаточную точность моделирования. Проблема состоит в том, что помимо неизменяющихся геометрических отклонений, существенное значение на моделирование манипуляционных систем оказывают изменяющихся в процессе их движения геометрические отклонения. Основными причинами возникновения таких отклонений являются зазоры в шарнирах и упругая податливость элементов их конструкции.

Для отражения влияния изменяющихся геометрических отклонений при моделировании манипуляционных систем разработаны динамические модели, учитывающие линейные отклонения, соответствующие смещению центров шарниров относительно их номинальных положений, и угловые отклонения, соответствующие перекоосу (скручиванию) шарниров. Исключение в полученных динамических моделях элементов тождественно равных нулю позволило повысить их вычислительную эффективность в несколько раз.

Динамическая модель, разработанная для моделирования только линейных отклонений, соответствует манипуляционной системе, в которой звенья моделируются 4-х степенными шарнирами, а динамическая модель для моделирования только угловых отклонений – 3-х степенными шарнирами. В динамической модели для моделирования как линейных, так и угловых отклонений используются

уже 6-и степенные шарниры. Отсутствие связей в таких шарнирах может быть компенсировано внешними силами и/или их моментами.

Для определения влияния отклонений позиционирования на движение манипуляционных систем разработана динамическая модель учитывающая малые отклонения обобщённых (шарнирных) координат, соответствующих малым упругим деформациям, часто возникающим в передаточных механизмах приводов.

Исследуемые отклонения позиционирования предложено разложить на две компоненты. Одна компонента представляет собой квазистатическую составляющую отклонения, а вторая динамическую (колебательную). Это позволило при моделировании разделить вычисление медленно и быстро протекающих процессов.

Разработанная на основе метода малого параметра путём декомпозиции исходного уравнения движения динамическая модель представляет собой систему трёх уравнений. Первое уравнение представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее программное движение манипуляционной системы. Второе уравнение также является дифференциальным и описывает малые упругие колебания около квазистатического положения равновесия манипуляционных систем, возникающие при их движении. Третье уравнение алгебраическое оно позволяет определить квазистатические смещения манипуляционных систем от заданных (программных) траекторий движения.

Разработанные методики позволяют выполнять подготовку соответствующих моделей манипуляционных систем роботов и моделирование их движения.

3 Методология математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов

3.1 Концептуальные положения методологии математического объектного моделирования манипуляционных систем роботов

3.1.1 Положения методологии математического объектного моделирования

3.1.1.1 Базовые понятия

Будем рассматривать модель как множество U некоторых характеристик (параметров), отражающих состояние исследуемой системы и внешней среды. Данное множество может быть разбито на два непересекающихся подмножества $U = \{X, Y\}$. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество внутренних характеристик системы, и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – множество внешних характеристик. Выделение необходимых характеристик, составляющих данные множества, осуществляется опытным путём на основе анализа поведения исследуемой системы.

Математическая модель представляет собой математическое описание множества отображений множества U на множество X : $U = \{X, Y\} \rightarrow X$. Полнота математической модели определяется количеством уравнений, описывающих данные отображения. Замкнутой считается система уравнений, в которой количество линейно независимых уравнений равно количеству неизвестных переменных. Поэтому количество уравнений в математической модели должно быть равно n – количеству внутренних характеристик системы и составление математической модели, следовательно, сводится к составлению системы уравнений вида

$$x_i = f_i(x, y), i = 1, \dots, n.$$

Однако такое представление математической модели является идеальным случаем. Так как не всегда удаётся получить уравнения, в которых неизвестные могут быть выражены в явном виде. Часто системы уравнений являются нелинейными, а для непрерывно детерминированных систем ещё и дифференциальными. Как правило, алгебраические уравнения в моделях таких систем являются или

решениями дифференциальных уравнений, полученными аналитическим способом, или их вырожденной формой. Таким образом, в случае непрерывно детерминированной системы математическая модель такой системы в общем случае будет иметь вид системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_i = (x, \dot{x}, \dots, x^{(k)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = 0, i = 1, \dots, n.$$

В дальнейшем будем использовать термин математическая модель по отношению как ко всей системе уравнений, разрешимой относительно внутренних характеристик (параметров) моделируемой системы, так и по отношению к её отдельным структурным частям. Такими частями могут быть как отдельные уравнения системы, так и структурные части самих уравнений. Это обобщение обосновано, так как структурно обособленная часть математической модели также моделирует какую-то характеристику моделируемой системы, но не вошедшую в исследуемые множества X и Y . Например, по причине того, что эта характеристика не представляет интерес для исследования, в решаемой на основе моделирования задаче.

Имитационная модель представляет собой объект заместитель моделируемой системы, предназначенный для исследования некоторых её свойств. Если под свойствами системы понимать значения её некоторых параметров, то имитационная модель должна отражать значения этих параметров в исследуемые моменты времени. Такое определение имитационной модели включает в себя в частности сформулированное ранее определение математической модели. Таким образом, всякая математическая модель может рассматриваться как имитационная модель или её часть, но имитационная модель не обязательно должна быть математической.

Такое определение двух фундаментальных понятий теории моделирования сложных систем позволит в дальнейшем сформулировать основные положения разработанной методологии объектно-ориентированного моделирования манипуляционных систем роботов, построенной на методах конструирования и модификации объектных схем математических моделей, которые в некоторых случаях

уже перестают соответствовать определению математической модели, но продолжают соответствовать определению имитационной модели.

3.1.1.2 Концептуальная схема моделирования манипуляционных систем роботов

Методология моделирования движения манипуляционных систем роботов может быть представлена концептуальной схемой (рис. 3.1), отражающей основные задачи моделирования, и этапы построения математических моделей, реализующих представленные в работе методы. Решаемые при моделировании задачи объединены в две основные группы. Одна группа объединяет задачи, связанные с моделированием кинематики манипуляционных систем, другая – задачи, решаемые на основе моделирования динамики.

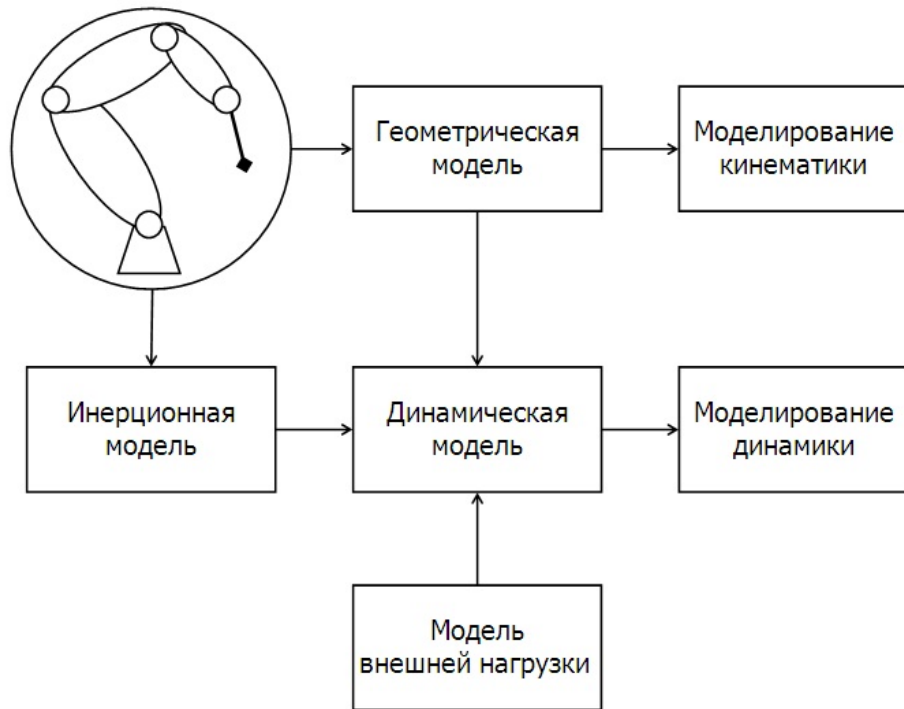


Рис. 3.1. Концептуальная схема моделирования

Традиционный подход к построению динамических моделей механических систем предполагает составление кинематической схемы исследуемого механизма, на основе которой могут быть рассчитаны его кинематические параметры, а

задачи динамики могут быть решены, если кинематическая схема будет дополнена инерционными параметрами механической системы.

Разработанная методология формализует процедуру составления кинематической схемы исполнительного механизма робота на основе методики построения геометрической модели его манипуляционной системы, а процедуру дополнения кинематической схемы инерционными параметрами на основе методики построения инерционной модели.

Геометрическая модель в данном случае рассматривается не как изображение объекта оригинала, а как математическая модель, содержащая его геометрические параметры. В частности, на основе геометрической модели механизма может быть построена его 3D-модель. Помимо геометрических параметров (угловых и линейных) геометрическая модель содержит информацию о видах шарниров, соединяющих звенья механизма, и их расположении в структуре механизма.

В соответствии с концептуальной схемой (рис. 3.1) может быть определена последовательность составления математических моделей для моделирования кинематики манипуляционных систем роботов (рис. 3.2).



Рис. 3.2. Моделирование кинематики

При использовании метода двух связываемых с каждым звеном систем координат для построения геометрической модели манипуляционной системы в структуре этой модели могут быть выделены две части. Одна часть геометрической модели претерпевает изменение при её движении, а другая остаётся неизменной. Неизменяющаяся часть геометрической модели определяется конструктивными параметрами звеньев и их положением (ориентацией), соответствующим исходному положению механизма, а изменяющаяся часть отражает изменения положения звеньев относительно исходного, связанные с их движением.

Такое разделение геометрической модели на части позволяет в дальнейшем в математических моделях, построенных на её основе, выполнять операцию дифференцирования только над изменяющейся частью, а в неизменяющейся части учитывать первичные геометрические отклонения (угловые и линейные) звеньев, вызванные неточностью изготовления и сборки составляющих их деталей.

Математическим аппаратом для создания геометрических моделей являются матрицы (4×4) преобразования однородных координат. Эти матрицы обеспечивают преобразования координат точки из одной системы координат в другую с учётом относительного поворота и смещения начал этих систем.

Практическим отражением преимуществ, предоставляемых геометрическими моделями, является разработанный численный метод коррекции интегральных отклонений движения манипуляционных систем, возникающих из-за наличия первичных геометрических отклонений, связанных с изготовлением и сборкой деталей звеньев манипуляционных систем. Метод позволяет на основе законов движения, полученных для номинальной модели робота, соответствующей данным конструкторской документации (3D-модели), получить закон движения конкретного образца с учётом его геометрических отклонений, определяемых современными методами измерений.

При построении математических моделей для моделирования динамики манипуляционных систем в дополнении к геометрической модели должна быть составлена инерционная модель, описывающая распределение масс внутри звеньев манипуляционной системы с использованием матриц (4×4) инерции.

В соответствии с концептуальной схемой (рис. 3.1) может быть определена последовательность составления математических моделей для моделирования динамики манипуляционных систем роботов (рис. 3.3).

Разработанная методика позволяет моделировать звенья манипуляционных систем твёрдыми телами. Форма практически любого звена может быть смоделирована телами простой геометрической формы, или телами, ранее составленными из таких тел. Для упрощения процесса моделирования звеньев телами может быть использована программа автоматической конечно-элементной разбивки объёмов

деталей, составляющих каждое звено, или же создана база данных (банк инерционных моделей), содержащая тела, наиболее часто встречающиеся при моделировании звеньев манипуляционных систем роботов.



Рис. 3.3. Моделирование динамики

Приведение динамических моделей, предназначенных для моделирования различных прикладных задач динамики манипуляционных систем, к структуре динамических моделей (1.94) и (1.95) выполнялось с использованием метода декомпозиции уравнений движения, получаемых на основе уравнения Лагранжа второго рода. Таким образом, были выделены в явном виде векторы производных от обобщённых координат и соответствующие им матрицы, содержащие геометрические и инерционные параметры звеньев манипуляционных систем.

Матричная форма динамических моделей и матричная структура выражений для вычисления элементов матриц этих моделей предоставляют возможность при построении графа алгоритма вычислений определить уровни, на которых могут быть выделены фрагменты данных, вычисление которых могут выполняться параллельно. Использование многоядерных и многопроцессорных вычислительных машин позволит реализовать высокую вычислительную эффективность такого алгоритма и динамической модели в целом.

Разделение геометрической модели на изменяемую и неизменяемую части учитывается при фрагментации данных на нижнем уровне. Это позволяет дополнительно повысить вычислительную эффективность алгоритма. Другие дополнительные меры повышения эффективности вычислений были рассмотрены ранее при построении соответствующих динамических моделей. Это связано в первую очередь с исключением тождественно равных нулю элементов из структуры этих моделей.

3.1.2 Перспективы математического объектного моделирования

3.1.2.1 Объектно-ориентированный подход

Определяющей особенностью разработанной методологии моделирования движения манипуляционных систем является её направленность на использование объектно-ориентированного подхода. Объектно-ориентированный подход в рассматриваемой методологии реализуется путём выделения в структуре данных и алгоритмов, используемых при моделировании, базовых классов, на основе которых создаются другие более сложные классы, из которых уже непосредственно формируются математические модели.

Класс в данном случае нужно рассматривать как форму структуры, являющейся общей для определённой группы объектов, отнесенных к данному классу. Под объектами понимаются определённые части математических моделей. Определяемое таким образом понятие класса математических объектов, является частным случаем понятия «рода структуры» в бурбаковском формализме.

Класс как структурная форма объединяет данные и методы их обработки. Данные могут быть инкапсулированы внутри класса (*private*), то есть могут быть доступны только для методов своего класса. Также могут быть объявлены данные и методы доступные из других классов (*public*). Один из методов может быть объявлен конструктором объектов данного класса.

Объекты – это элементы, имеющие структуру, какого либо класса. Объектами могут быть представлены как реальные физические тела (системы), так и их идеальные (виртуальные) формы. В частности, в качестве объектов будут рассматриваться составные части математических моделей.

Введенные понятия «класс» и «объект» полностью соответствуют одноимённым понятиям, используемым в объектно-ориентированном программировании, реализованном во многих языках программирования высокого уровня. Синтаксис и семантика построения классов в рассматриваемой методологии моделирования заимствованы из языка объектно-ориентированного программирования C++ (рис. 3.4).

```
class <Name_class>
```

```
{ private:
```

Блок описания переменных

```
public:
```

Блок описания переменных и методов

```
}
```

Рис. 3.4. Структура класса

Первоначально создаются базовые классы. Последующее определение классов, наследующих свойства базовых, позволяет использовать объектно-ориентированный подход при составлении математических моделей манипуляционных систем и программировании алгоритмов, реализующих эти модели.

3.1.2.2 Метод визуального программирования математических моделей

На основе объектно-ориентированного подхода разработанная методология позволяет, реализовать метод визуального программирования математических моделей (Low-code). Суть метода состоит в том, что различные математические модели строятся из отдельных, независимых друг от друга, частей-объектов. Эти части в свою очередь могут состоять из других более простых частей-объектов. В основе таких составных частей находятся объекты базовых классов или объекты, наследующие их свойства (рис. 3.5).

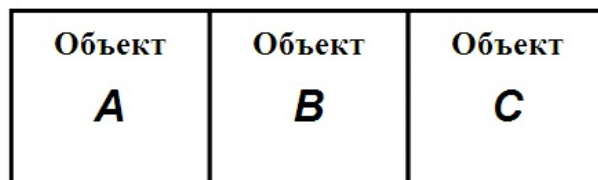


Рис. 3.5. Соединение объектов в модели

Таким образом, математические модели могут собираться из объектов базовых классов как из кирпичиков. Процесс сборки аналогичен сборке изделий из

элементов конструктора «Техно-Лего», сложные детали которого состоят из комбинации базовых деталей. Для реализации процесса сборки разработан формализм, определяющий «механизм» взаимодействия соединяемых друг с другом элементов конструктора, являющихся объектами соответствующих классов.

При разработке моделей можно выделить три основных этапа: этап разработки математической модели, этап алгоритмизации и программирования, и, собственно, этап моделирования (рис. 3.6).

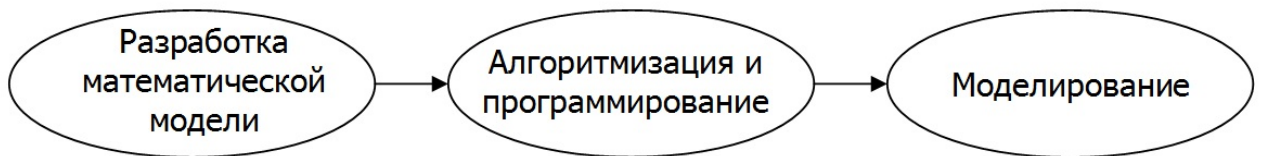


Рис. 3.6. Основные этапы моделирования

Преимущество метода визуального программирования состоит в том, что применение этого метода при разработке математических моделей исключает этап их алгоритмизации и программирования (рис. 3.7), по существу данный метод является разновидностью методов визуального программирования.

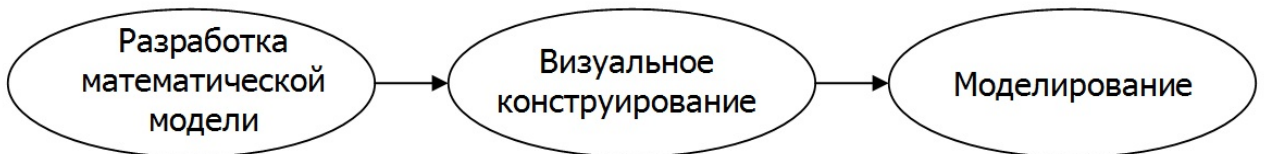


Рис. 3.7. Основные этапы моделирования методом визуального конструирования

На основе метода визуального программирования разработана методика, позволяющая реализовать процесс составления математических моделей, представляющих собой различные динамические модели, аналогичные (1.94) и (1.95), полученные методом Лагранжа-Эйлера. Практической реализацией этой методики может стать компьютерная программа для сборки (составления) математических моделей и моделирования на их основе движения манипуляционных систем роботов. Инструкциями для сборки математических моделей в предлагаемом конструкторе являются структурные схемы математических моделей.

3.1.2.3 Метод структурных мутаций

Перспективной составляющей рассматриваемой методологии, отражающей её объектно-ориентированную направленность, является разработанный метод целенаправленных структурных мутаций в моделях механизмов. Метод позволяет создавать приближённые модели механизмов, в частности манипуляционных систем, путём модификаций их математических моделей. Модификация проводится в некоторых местах структурной схемы математической модели путём замены выбранных объектов на альтернативные им объекты.

Такое преобразование (модификация) математической модели не обязательно должно быть строго обоснованным (математически эквивалентным). Необходимо лишь соблюдения условия непрерывности вычислений. Количественной мерой для оценки адекватности модифицированной модели может служить величина отклонения траектории движения модели от траектории движения реальной манипуляционной системы. Очевидно, что обе траектории будут отличаться от заданной (программной) траектории, соответствующей номинальной модели.

Применение данного метода позволяет компенсировать влияние случайных факторов, не учитываемых аналитической моделью, которая, в нашем случае, является непрерывно детерминированной. В результате исходная аналитическая модель трансформируется в имитационную модель (рис. 3.8).

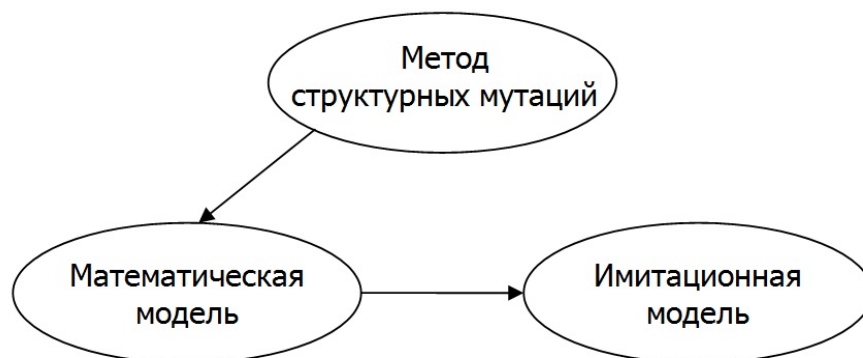


Рис. 3.8. Применение метода структурных мутаций

Название метода выбрано по аналогии с процессами мутаций, происходящими в молекулах ДНК живых организмов. Однако модификации структуры ди-

намических моделей могут проводиться не случайно, а целенаправленно, по разработанным заранее методикам. Например, может быть использована методика анализа влияния распределения масс на динамику манипуляционных систем.

Применение систем искусственного интеллекта на основе нечёткой логики и/или нейронных сетей позволит автоматизировать процедуру принятия решений, многократно выполняемую при использовании алгоритма, реализующего метод целенаправленных структурных мутаций в моделях механизмов.

3.1.3 Краткое обобщение основных положений методологии

Таким образом, рассмотрены положения, составляющие концептуальную основу, разработанной методологии моделирования манипуляционных систем роботов, основными из которых являются:

- определение геометрической и инерционной моделей в качестве основополагающих понятий для решения задач моделирования кинематики и динамики манипуляционных систем роботов;
- применение объектно-ориентированного подхода при конструировании и модификации объектных схем, соответствующих математических моделей.

Построение динамических моделей манипуляционных систем роботов на основе метода Лагранжа-Эйлера, с выделением в них геометрических и инерционных моделей, составленных с использованием матриц преобразования однородных координат и матриц инерции, позволяет применить объектно-ориентированный подход при создании, анализе и модификации таких динамических моделей, например, путём визуального конструирования.

Естественным концептуальным развитием разработанной методологии моделирования стал предложенный метод целенаправленных структурных мутаций в математических моделях манипуляционных систем. Применение данного метода позволяет модифицировать математические модели на уровне изменений в представляющих их структурных схемах.

3.2 Объектное моделирование кинематики манипуляционных систем роботов

3.2.1 Классы и объекты геометрических моделей

3.2.1.1 Классы *Matrix*, *Homogeneous_matrix* и *Geometric_model*

На основе проведенного структурного анализа, основывающегося на объектно-ориентированном подходе, в разработанных математических моделях были выделены структурообразующие части. На основе этих частей были образованы базовые и производные от них классы. Производные классы образуются из базовых классов на основе принципа наследования и отражают более сложные структурные формы математических моделей.

Непосредственно сами части математических моделей могут рассматриваться как объекты, соответствующие тому, или иному классу. Класс в данном случае нужно рассматривать как форму структуры, являющейся общей для определённой группы объектов, отнесенных к данному классу.

Поскольку математические модели, описывающие движение манипуляционных систем, представляют собой матричные уравнения то в качестве базового класса для всех объектов, соответствующих структурным частям таких математических модели, целесообразно использовать класс матриц. В блок описания данных *private* этого класса должны войти переменные, с помощью которых могут быть представлены матрицы, например, двумерные массивы с элементами вещественного типа, а в блок описания данных и методов *public* должны войти функции, выполняющие типовые операции над матрицами, такие как сложение, вычитание, умножения и т.п. (см. рис 3.4).

Геометрическая модель манипуляционной системы – это математическая модель, представляющая собой множество матриц преобразования однородных координат, связанных соотношениями (1.4) и (1.5). Поэтому для описания объектов, представляющих собой данные матрицы, необходимо на основе базового класса матриц создать подкласс матриц преобразования однородных координат.

Такой подкласс нужно рассматривать как производный класс, построенный на основе базового класса, и наследующий его структуру.

Таким образом, для создания объектов, соответствующих геометрическим моделям первоначально целесообразно создать класс матриц, например, с именем `Matrix`, содержащий описание данных, представляющих матрицы, и методы обработки этих данных. Затем на основе этого класса, наследуя его структуру и учитывая свойства матриц (1.1–1.3), создать класс матриц преобразования однородных координат `Homogeneous_matrix`. И уже на основе этого класса, в соответствии с разработанной методикой (см. п. 1.1.4), создать класс `Geometric_model`, содержащий специальные матрицы, составляющие геометрической модели манипуляционных систем.

Описанная последовательность создания классов, определяющих структуру объектов, составляющих геометрические модели манипуляционных систем роботов, может быть представлена схематично (рис. 3.9). Данная последовательность представляет собой наследственную цепочку, которая отражает вложенную структуру наследуемых свойств от одного класса к другому.

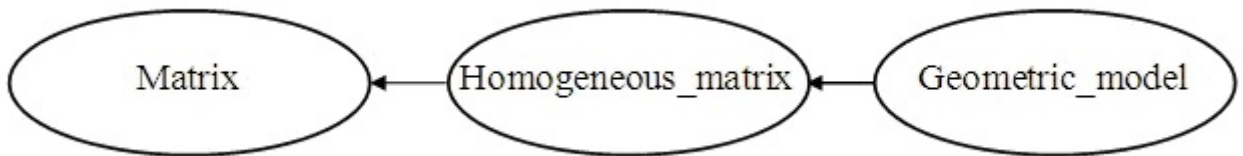


Рис. 3.9. Наследственная цепочка класса `Geometric_model`

Специальные матрицы, составляющие геометрические модели манипуляционных систем роботов (1.5), (1.8–1.10), представляют собой матрицы преобразования однородных координат $A_{(i-1),(i-1)^*}$, $A_{(i-1)^*,i}$, $A_{(i-1),i}$, $A_{0,k}$, ($i, k = 1 \dots n$). Напомним, что массив матриц $A_{(i-1),(i-1)^*}$, составляет неизменяющуюся часть геометрической модели, а массив матриц $A_{(i-1)^*,i}$ соответствует изменяющейся части, зависящей от относительного положения звеньев манипуляционной системы. Соответственно, матрицы $A_{(i-1),i}$ и $A_{0,k}$ также относятся к изменяющейся части, так как получаются в результате произведения первых двух матриц.

Таким образом, в блоке описания данных класса `Geometric_model` должны быть указаны переменные, в той или иной форме, представляющие рассмотренные специальные матрицы. Например, для этого могут быть использованы многомерные массивы, позволяющие индексировать положение в них элементов матриц, объединённых в массивы. Количество матриц в массиве определяется количеством звеньев в моделируемой манипуляционной системе. Также, должны быть определены методы, позволяющие инициализировать объекты, соответствующие данным матрицам, и реализующие необходимые операции с ними.

Ниже представлен эскиз кода, схематично отражающего структуру класса `Geometric_model` (рис. 3.10).

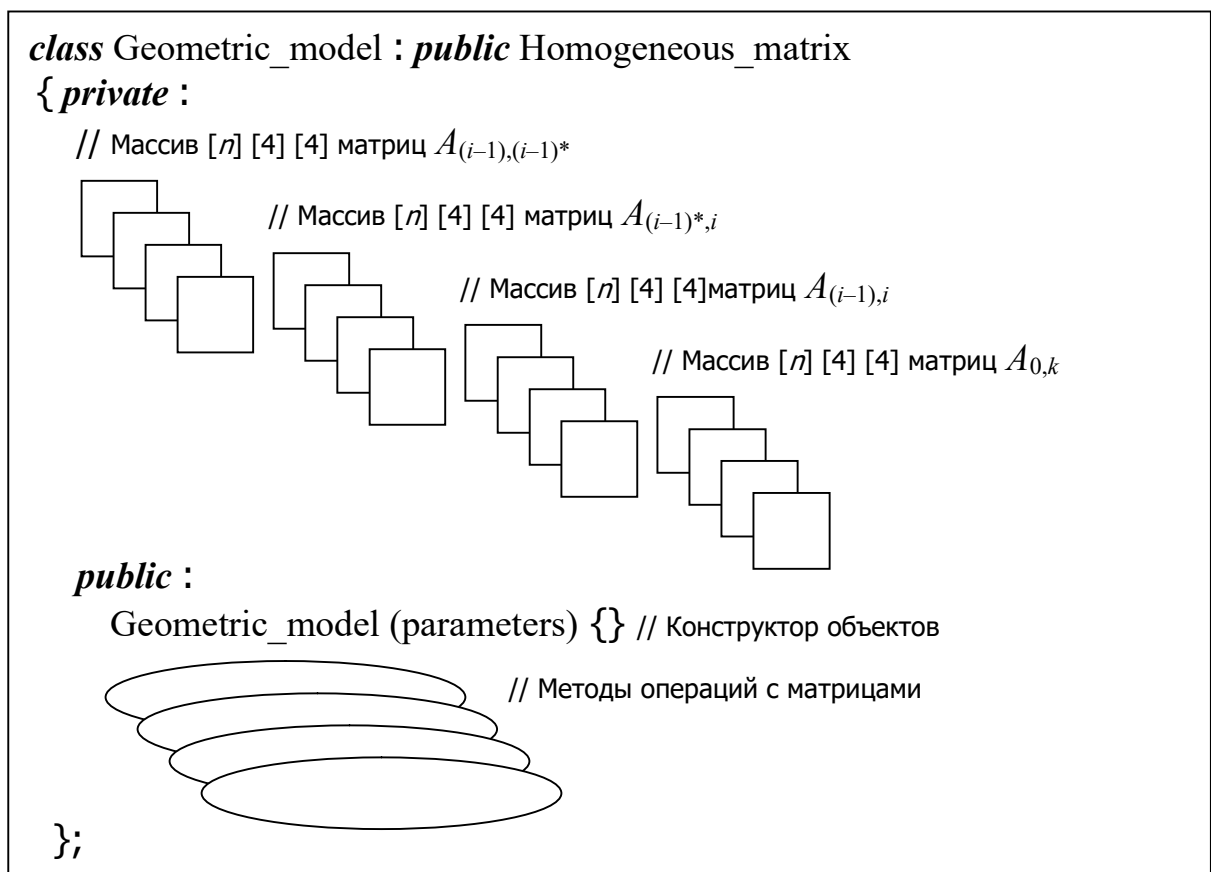


Рис. 3.10. Структура класса `Geometric_model`

Обозначения, представленные на рис. 3.10, соответствуют синтаксису объектно-ориентированного языка программирования C++. Связь производного класса с базовым определяется строкой кода

```
class Geometric_model : public Homogeneous_matrix.
```

В описании методов класса может присутствовать конструктор объектов данного класса. Конструктор представляет собой функцию с именем, обязательно совпадающим с именем своего класса. Например, строка кода

`Geometric_model(parameters) {}`

представляет собой вызов функции (подпрограммы) с именем `Geometric_model`, которая на основе передаваемых ей (в неё) параметров (`parameters`), являющихся исходными данными, описывающими кинематическую схему манипуляционной системы, формирует массивы специальных матриц.

3.2.1.2 Классы специальных матриц

Класс геометрических моделей, содержащий массивы специальных матриц преобразования однородных координат, удобен при разработке алгоритмов компьютерных программ, предназначенных для моделирования движения манипуляционных систем роботов. Однако, для визуального конструирования математических моделей необходимы объекты, соответствующие отдельным матрицам из массивов специальных матриц, относящихся к геометрическим моделям.

Решить данную задачу можно путём образования четырёх классов, производных от класса `Homogeneous_matrix` (рис. 3.11):

`Matrix_Aii_` – класс, соответствующий матрицам $A_{(i-1),(i-1)*}$;

`Matrix_Ai_j` – класс, соответствующий матрицам $A_{(i-1)*,i}$;

`Matrix_Aij` – класс, соответствующий матрицам $A_{(i-1),i}$;

`Matrix_Aok` – класс, соответствующий матрицам $A_{0,k}$.

На схеме (рис. 3.11) стрелки направлены от базового класса к производным от него классам, обозначая направление (последовательность) действий при создании классов. Однако, при работе с объектами, создаваемых классов, взаимодействие между классами имеет обратную направленность. У базового класса нет возможности использовать данные и методы, описанные в производных от него классах, образно говоря, он их не видит. В тоже время классы наследники могут обращаться к данным и методам базового класса.

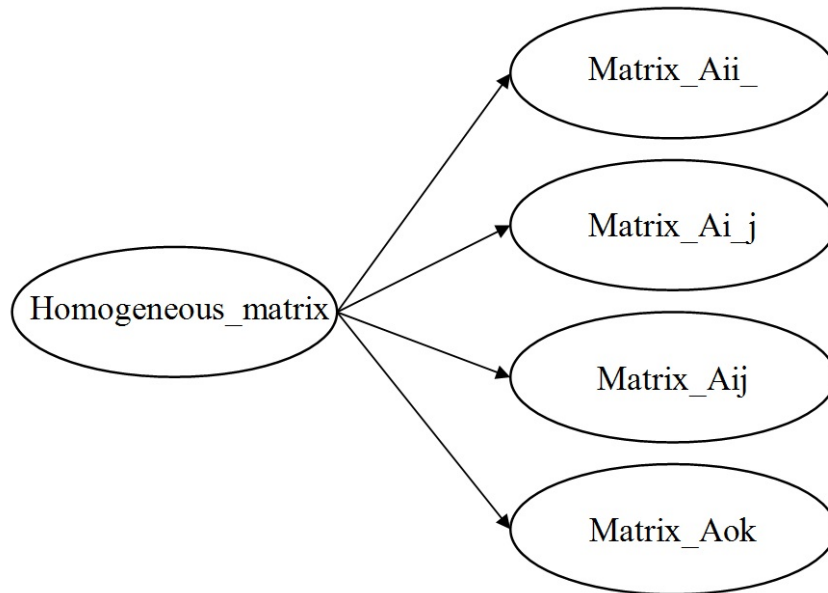


Рис. 3.11. Схема образования производных классов

В описании образуемых производных классов необходимо указать конструкторы объектов данного класса. Конструктор необходим для инициализации объектов производных классов при их создании, соответствующими этому объекту значениями специальных матриц, выбираемых из данных предварительно созданного объекта класса `Geometric_model`.

Например, строка кода

```
Matrix_Aij(parameters, Geometric_model Object) { Object.Method_Aij();}
```

иллюстрирует вызов конструктора объектов класса `Matrix_Aij`, который на основе передаваемых ему параметров (`parameters`), определяющих нужную матрицу в массиве матриц $A_{(i-1),i}$, инициализирует создаваемый объект значениями этой матрицы, копируемыми из объекта `Object` класса `Geometric_model`. Для этого в конструкторе выполняется обращение к методу `Method_Aij()` класса `Geometric_model` имеющее вид

```
Object.Method_Aij().
```

Описанное взаимодействие объектов двух классов может быть проиллюстрировано (рис. 3.12). На схеме стрелками показана последовательность взаимодействия объекта `Object_Aij` класса `Matrix_Aij` с данными объекта `Object` класса

Geometric_model инициализированного ранее. Результатом является копирование значений соответствующей матрицы в массив данных объекта Object_Aij.

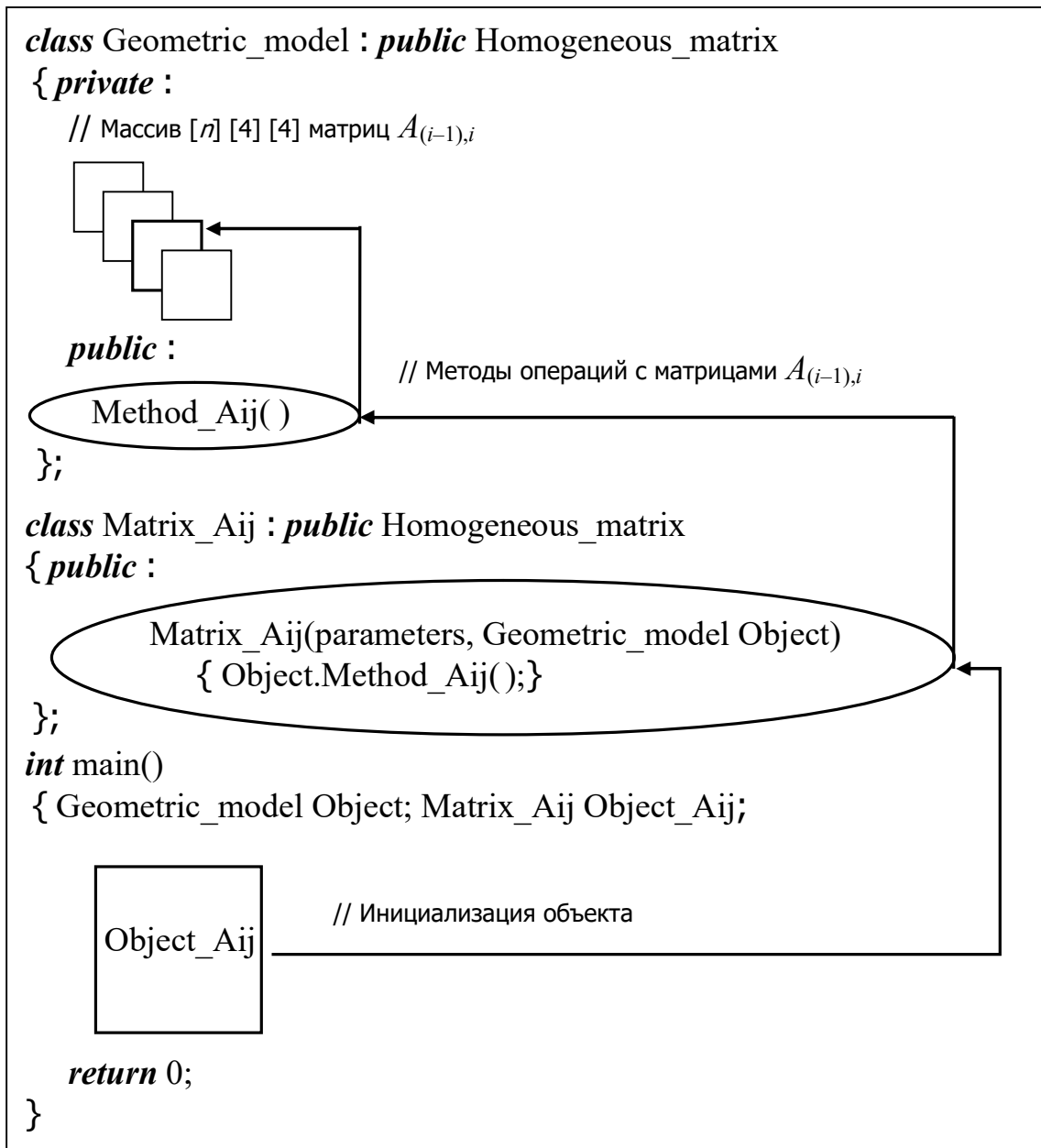


Рис. 3.12. Взаимодействие объектов с данными класса `Geometric_model`

С формальной точки зрения класс `Geometric_model` не может считаться базовым, так как он образован путём наследования свойств класса `Homogeneous_matrix`, который в свою очередь является «подклассом» класса `Matrix`. Однако данную наследственную цепочку можно рассматривать как техниче-

скую, отражающую внутреннюю архитектуру программного обеспечения, реализующего моделирование.

Такое представление класса, описывающего объекты геометрических моделей, содержит в себе возможность последующего изменения алгоритмов, реализующих методы матричных вычислений с целью повышения их эффективности, в том числе с использованием алгоритмов параллельных вычислений. При этом, эти изменения не повлекут за собой изменения в основных частях программы, относящихся к объектам классов наследников.

Таким образом, можно рассматривать класс `Geometric_model` и классы, описывающие группу специальных матриц, в качестве структурообразующих классов в проблемно-ориентированной части программного обеспечения, реализующего моделирование движения манипуляционных систем роботов.

3.2.1.3 Графическое представление операций с объектами `Matrix`

Обращаясь к концептуальным положениям разработанной методологии моделирования манипуляционных систем, основывающимся на объектно-ориентированном подходе, отметим, что разрабатываемые математические модели могут быть представлены в виде связанных друг с другом объектов, соответствующих определённым классам. Таким образом, математические модели могут быть представлены как совокупности взаимодействующих объектов, на уровне которых может быть выполнена декомпозиция математических моделей.

Введение графического обозначения объектов позволяет получить схематичное представление математических моделей, составленных из объектов. Будем обозначать объекты в форме прямоугольников.

Если объект представляет собой матричную структуру, соответствующую, например, классу `Matrix`, то операцию умножения двух объектов будем изображать приставлением изображения одного объекта к изображению другого объекта по одной из сторон (рис. 3.13). Матрица, представляемая первым объектом (`Object_1`), умножается справа на матрицу, представляемую вторым объектом (`Object_2`).

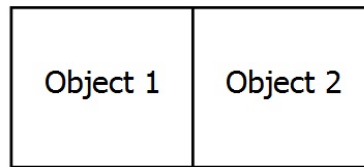


Рис. 3.13. Умножение объектов

Операцию сложения двух или нескольких объектов типа Matrix будем изображать так, как показано на рис. 3.14

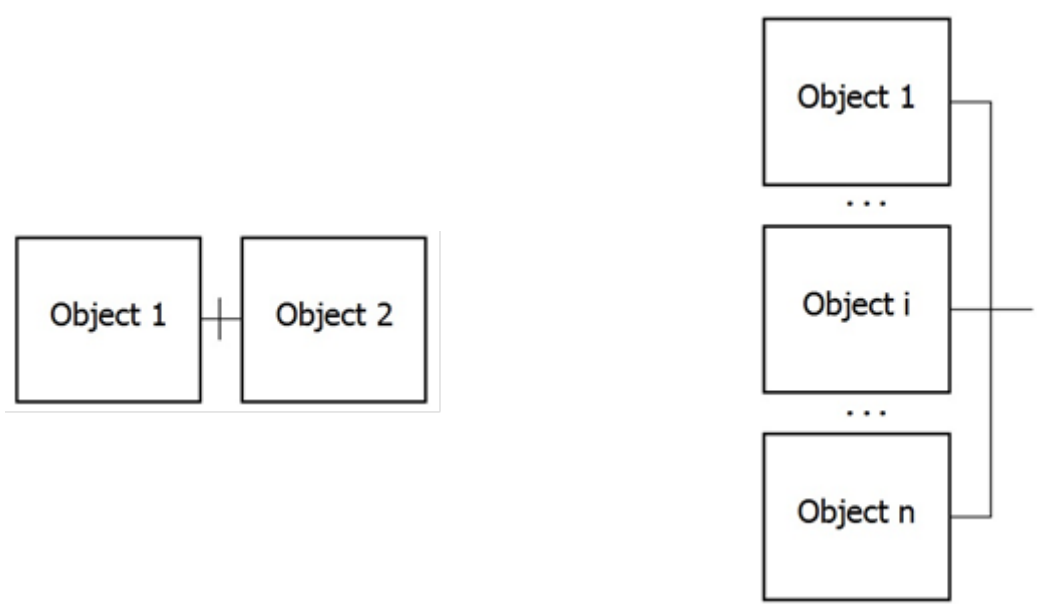


Рис. 3.14. Сложение объектов

Вычитание одного объекта из другого объекта будем изображать (рис. 3.15).

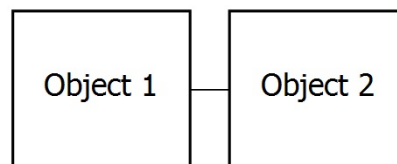


Рис. 3.15. Вычитание объектов

Операцию присваивания значения одного объекта другому объекту будем изображать, так как представлено на рис. 3.16. В данном случае объекту Object_1 будут присвоены значения объекта Object_2.

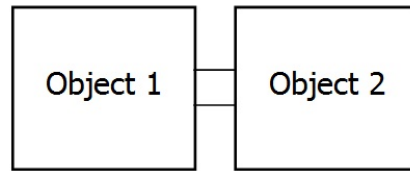


Рис. 3.16. Операция присваивания

Обозначения других операций будут вводиться по мере необходимости. Следует обратить внимание на то, что операции над объектами классов реализуют математические операции над определёнными данными, описанными в соответствующем классе. Возможность представлять операции над данными объектов в виде операций над самими объектами называется процедурой перегрузки операций [].

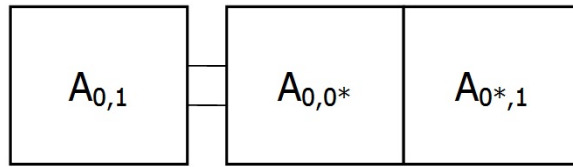
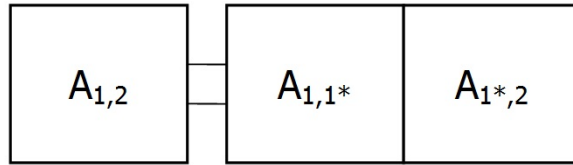
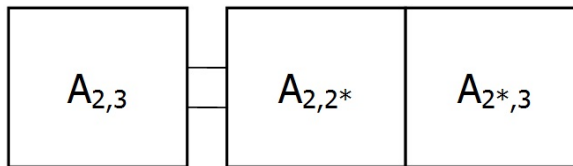
В данном случае операции над матрицами моделируются операциями над объектами класса *Matrix*. Выполнение этих операций влечёт за собой вызов соответствующего метода, описанного в данном классе и выполняющего преобразование соответствующих переменных, также описанных внутри этого класса, например, как двумерные массивы.

3.2.1.4 Объектное представление геометрических моделей

Рассмотрим математическую модель (1.4), определяющую относительное положение двух соседних звеньев. Матрицы $A_{(i-1),(i-1)^*}$, $A_{(i-1)^*,i}$, $A_{(i-1),i}$, составляющие данную математическую модель, могут быть представлены объектами соответствующих им классов. Таким образом, математическая модель может быть представлена как совокупность взаимодействующих объектов.

Будем обозначать объекты классов точно также, как и матрицы, которые они представляют. Например, объект класса *Matrix_Aii_*, содержащего методы для матриц $A_{(i-1),(i-1)^*}$, при $i=1$ будем обозначать $A_{0,0^*}$, а объект класса *Matrix_Ai_j*, содержащего методы для матриц $A_{(i-1)^*,i}$, при $i=1$ соответственно $A_{0^*,1}$.

Объектное представление (объектная схема) математической модели (1.4), как совокупности взаимодействующих объектов для $i=(1-3)$, будет иметь вид (рис. 3.17–3.19).

Рис. 3.17. Объектное представление $A_{0,1}=A_{0,0*}A_{0*,1}$ Рис. 3.18. Объектное представление $A_{1,2}=A_{1,1*}A_{1*,2}$ Рис. 3.19. Объектное представление $A_{2,3}=A_{2,2*}A_{2*,3}$

Рассмотрим математическую модель (1.5), определяющую относительное положение каждого звена манипуляционной системы относительно неподвижной системы координат. Матрицы $A_{0,k}$, стоящие в левой части уравнения, определяющего данную математическую модель, являются объектами класса `Matrix_Aok`. Матрицы $A_{(i-1),i}$, стоящие в правой части этого уравнения, соответствуют классу `Matrix_Aij`.

На рис. 3.20 представлена объектная схема математической модели (2.5), для случая $k=3$, соответствующая трёхзвенной манипуляционной системе.

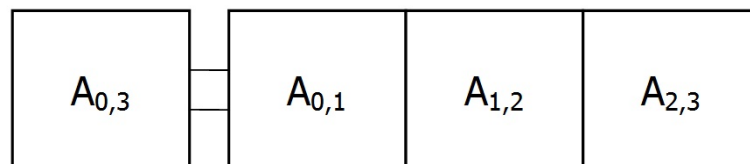


Рис. 3.20. Объектная схема математической модели трёхзвенной манипуляционной системы

Элементы, представленные на объектной схеме (рис. 3.20), могут быть заменены на составляющие им базовые элементы (рис. 3.17–3.19) (рис. 3.21).

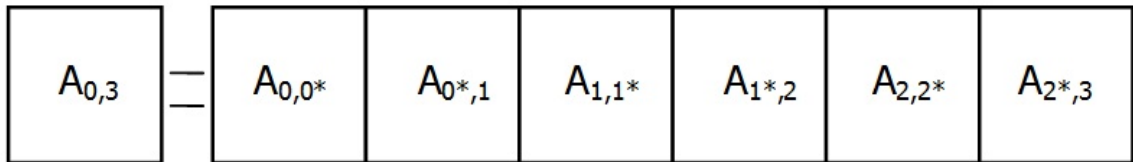


Рис. 3.21. Развёрнутое представление математической модели

Операции над специальными матрицами геометрических моделей моделируются операциями над объектами производных классов $Matrix_A_{ii}$, $Matrix_A_{i_j}$ и др. (см. рис. 3.11) точно также, как и в случаях, рассмотренных для объектов класса $Matrix$. Выполнение этих операций влечёт за собой вызов соответствующего метода, описанного в данном классе и выполняющего преобразования соответствующих переменных, также описанных внутри этого класса, например, как двумерные массивы с размерностью 4×4 .

Объектное представление математических моделей позволяет реализовать технологию их создания на основе построения графических моделей из комбинированных (сложных) и/или базовых (простых) элементов. Такая технология составляет основу метода визуального конструирования математических моделей.

Метод визуального конструирования математических моделей может быть реализован компьютерной программой, создающей среду для построения по установленным правилам объектных схем, соответствующих математическим моделям. Элементам объектной схемы ставятся в соответствие программно реализованные (виртуальные) объекты. Объекты инициализируются значениями, с которыми могут быть выполнены определённые операции.

Правила построения объектных схем геометрических моделей манипуляционных систем роботов, представляющих собой математические модели, были рассмотрены на примере объектов класса $Matrix$ (п.п. 3.2.1.3).

3.2.2 Объектное моделирование геометрических отклонений

3.2.2.1 Классы модифицированных геометрических моделей

В п. 3.2.1.1 представлена структура класса `Geometric_model` и наследственная цепочка его образования. Данный класс содержит массивы матриц преобразования однородных координат $A_{(i-1),(i-1)*}$, $A_{(i-1)*,i}$, $A_{(i-1),i}$, $A_{0,k}$, ($i, k = 1 \dots n$), соответствующие номинальной геометрической модели манипуляционной системы. Учёт первичных геометрических отклонений и отклонений позиционирования приводит к необходимости модифицирования номинальной геометрической модели.

Было рассмотрено три способа составления математических моделей (см. п.п. 2.1.2, 2.1.4, 2.1.5) соответствующих геометрическим моделям, учитывающим первичные геометрические отклонения. Первый способ определяется математической моделью (2.2). Вторым – соответственно (2.4–2.6) и представляет собой модификацию первого. Третий способ (2.7–2.9) представляет собой дальнейшую модификацию, позволяющую выделить в явном виде модифицирующую матрицу A_{i^*,\tilde{i}^*} .

В соответствии с выбранным способом модификации могут быть получены геометрические модели манипуляционных систем, параметризованные геометрическими отклонениями их звеньев. Таким образом, можно выделить три обособленные структуры, объединяющие данные и методы их обработки, соответствующие рассмотренным способам модификации геометрических моделей. На основе этих структур могут быть образованы три разных класса `Modif_geometric_model`, соответствующих получаемым геометрическим моделям, параметризованным геометрическими отклонениями.

На основе классов модифицированных геометрических моделей могут образовываться объекты, которые позволят с большей точностью решать задачи моделирования реальных образцов роботов. Например, совместное использование объектов номинальной и модифицированной геометрических моделей позволит решать задачу коррекции интегральных отклонений по методу (2.12–2.17).

Если классы модифицированных геометрических моделей создавать путём наследования свойств класса `Geometric_model`, соответствующего номинальным геометрическим моделям, то производные классы будут содержать внутри себя структуру базового класса. Объекты производных классов при этом будут обладать свойствами как номинальных, так и модифицированных моделей (рис. 3.22). Также, как и на схеме (рис. 3.11) представленной ранее стрелки, направленные от базового класса к производным классам, обозначают последовательность действий при создании классов, а не направления наследования свойств.

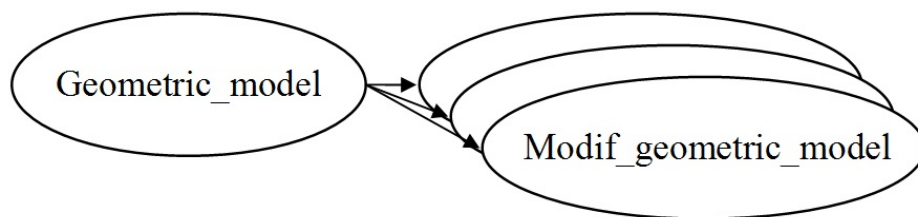


Рис. 3.22 Схема образования производных классов на основе класса `Geometric_model`

В соответствии со стандартом объектно-ориентированного языка программирования C++ для того чтобы методы классов наследников имели прямой доступ к данным базового для них класса необходимо эти данные в базовом классе поместить в блок описания данных и методов *protected*. Спецификатор доступа *protected*, в отличие от *private*, реализует такую возможность. Если оставить данные базового класса в блоке *private* (рис. 3.4), то доступ к ним из классов наследников может быть осуществлён только через методы базового класса, описанные в блоке *public*.

Создаваемые производные классы должны содержать массивы специальных матриц преобразования однородных координат $A_{i^* \tilde{i}^*}$, $\tilde{A}_{(i-1)^* j}$, $\tilde{A}_{(i-1), i}$, $\tilde{A}_{0, k}$, ($i, k = 1 \dots n$), соответствующие модифицированным геометрическим моделям манипуляционных систем, а также методы обеспечивающие выполнение необходимых операций с данными матрицами. При этом могут быть использованы методы, описанные в базовом классе `Geometric_model` (рис. 3.23).

Название методов в базовом классе и в производных классах могут совпадать. Функциям, соответствующим методам, выполняющим одинаковые задачи в базовом классе и в производных от него классах, удобно присваивать одинаковые имена. В этом случае в методах, описанных в производных классах, обращение к методам базового класса выполняется путём использования в коде описания вызова одноимённой функции символа «: :», обозначающего операцию разрешения. Например, строка

```
Method() { Geometric_model : : Method(); }
```

иллюстрирует вызов функций Method(), представляющей собой метод класса Geometric_model, осуществляемый одноимённой функцией, являющейся методом производного класса.

Среди методов, создаваемых классов, необходимо выделить конструкторы их объектов. Конструкторы на основе параметров (parameters), представляющих собой геометрические отклонения реальных манипуляционных систем от номинальных, инициализируют вычисляемыми значениями массивы специальных матриц, основываясь на разработанных математических моделях.

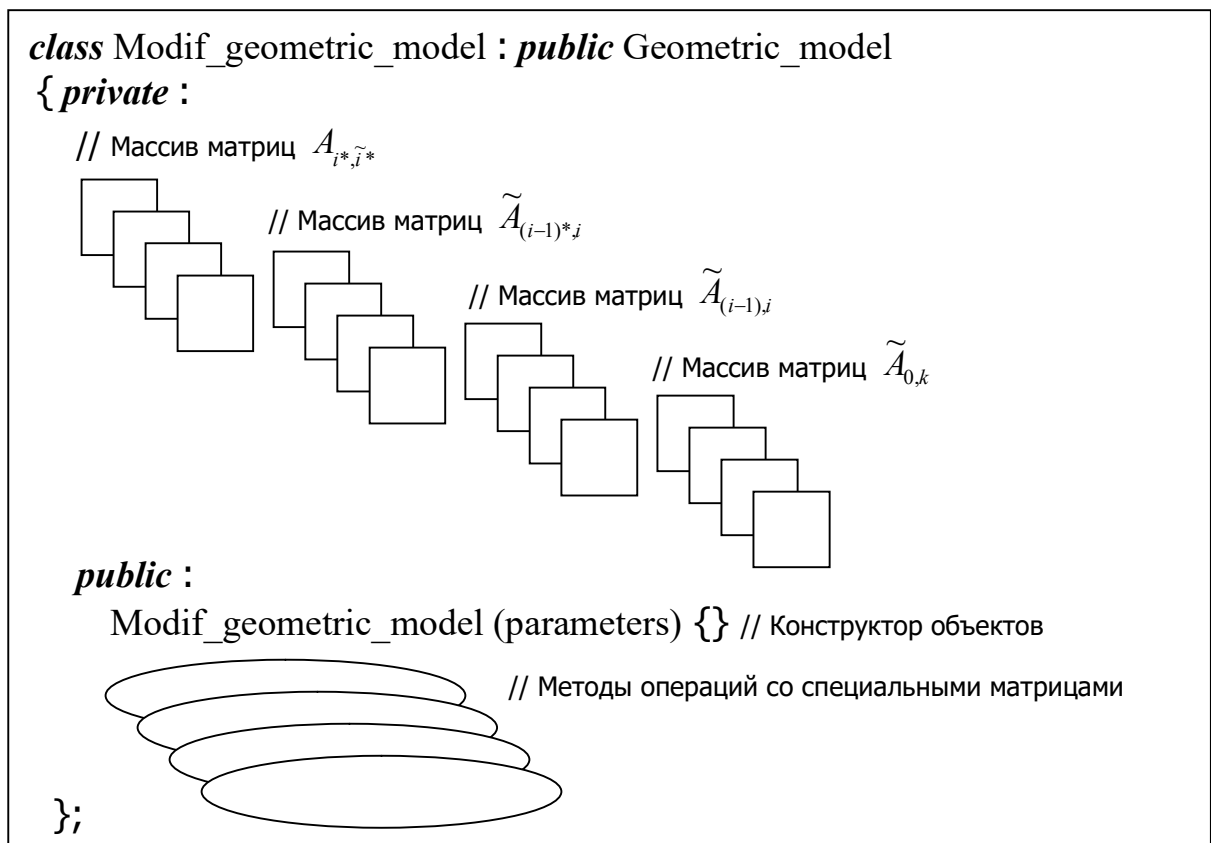


Рис. 3.23. Структура класса Modif_geometric_model

На рис. 3.23 представлен эскиз кода, схематично отражающего структуру класса `Modif_geometric_model`, реализующего один из методов модификации геометрических моделей, рассмотренных в п. 2.1.

3.2.2.2 Класс модифицирующих объектов

Классы модифицированных геометрических моделей, содержащие массивы специальных матриц преобразования однородных координат полезны при разработке алгоритмов компьютерных программ, предназначенных для моделирования движения манипуляционных систем роботов. Однако, для визуального конструирования математических моделей необходимы объекты, соответствующие отдельным матрицам из массивов специальных матриц, относящихся к модифицированным геометрическим моделям.

Рассмотрим математическую модель альтернативной геометрической модели представленной эквивалентными выражениями (2.7–2.9). Данная математическая модель может быть получена из неизменяющейся части геометрической модели матриц A_{ii^*} ($A_{(i-1),(i-1)^*}$) путём умножения этих матриц на матрицы A_{i^*,\tilde{i}^*} ($A_{(i-1)^*,\tilde{(i-1)}^*}$). Последние можно рассматривать как модифицирующие матрицы, назначение которых модифицировать первые матрицы путём их параметризации значениями геометрических ошибок.

Разработаем структуру класса `Modif_matrix_Aii_`, содержащего данные и методы, реализующие операции с матрицами A_{i^*,\tilde{i}^*} ($A_{(i-1)^*,\tilde{(i-1)}^*}$). Это позволит при объектно-ориентированном моделировании математических моделей создавать объекты, представляющие матрицы модификаторы.

Также, как и в случае со специальными матрицами номинальных геометрических моделей будем создавать разрабатываемый класс как подкласс класса `Homogeneous_matrix`. Разрабатываемый класс должен содержать описание данных, соответствующих матрице A_{i^*,\tilde{i}^*} ($A_{(i-1)^*,\tilde{(i-1)}^*}$), а также конструктор объектов класса и методы, реализующих операции с объектами.

На рис. 3.24 представлен эскиз кода, схематично отражающего структуру класса `Modif_matrix_Ai_i`, позволяющего создавать объекты-модификаторы для объектов класса `Matrix_Aii`.

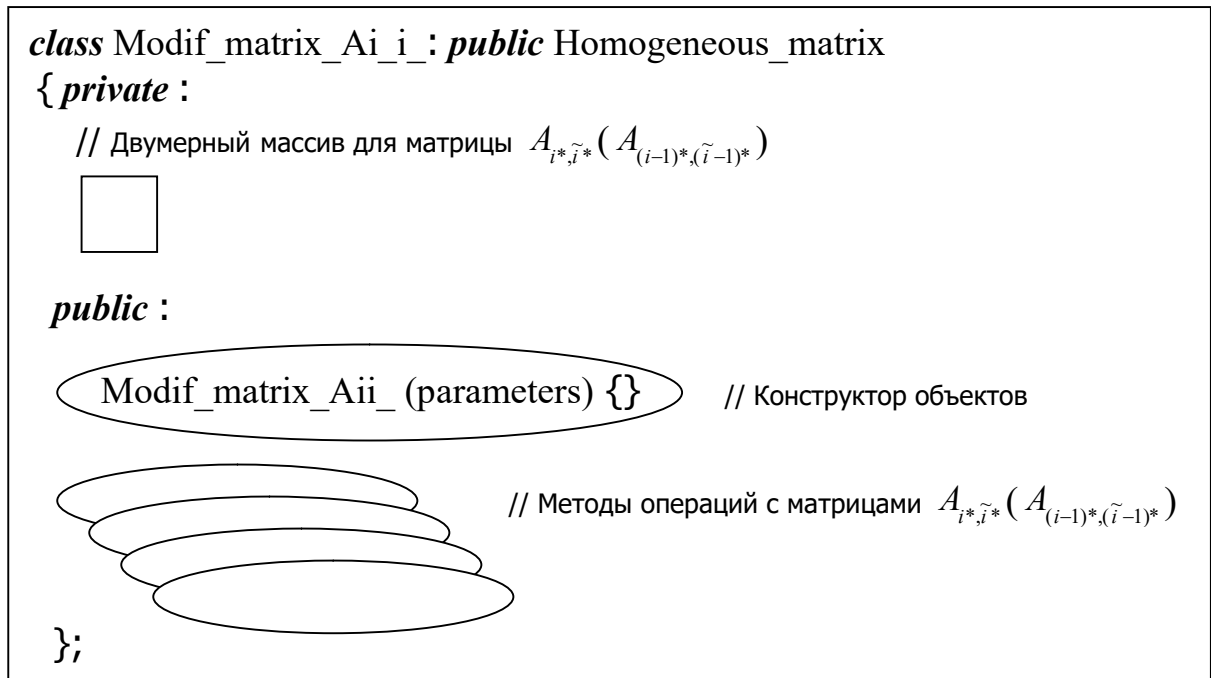


Рис. 3.24. Структура класса `Modif_matrix_Aii`

Аналогично может быть создан класс `Modif_matrix_Ai_j` для объектов соответствующих матрицам $\tilde{A}_{(i-1)*,j}$ моделирующим ошибки позиционирования (2.3), а также классы `Modif_matrix_Aij` и `Modif_matrix_Aok` для объектов представляющих матрицы $\tilde{A}_{(i-1),i}$ и $\tilde{A}_{0,k}$, соответствующие выражениям (2.15) и (2.16).

3.2.2.3 Объектное представление модифицированных геометрических моделей

Рассмотрим математическую модель (2.15), определяющую относительное положение двух соседних звеньев с учётом наличия в них геометрических отклонений. Матрицы $A_{(i-1)*,(\tilde{i}-1)*}$, $\tilde{A}_{(i-1)*,j}$, $\tilde{A}_{(i-1),i}$, составляющие данную математическую модель, могут быть представлены объектами соответствующих им классов. Таким образом, математическая модель может быть представлена как совокупность взаимодействующих объектов.

Как и ранее будем обозначать объекты классов точно также, как и матрицы, которые они представляют. Для удобства символ « \sim » используемый в обозначении матриц будем помещать перед обозначением объекта. Например, объект класса Modif_matrix_Ai_i , содержащего методы для матриц $A_{(i-1)^*,(i-1)^*}$, при $i=1$ будем обозначать $\sim A_{0^*,0^*}$, а объект класса Modif_matrix_Ai_j , содержащего методы для матриц $\tilde{A}_{(i-1)^*,j}$, при $i=1$ соответственно $\sim A_{0^*,1}$.

Объектное представление математической модели (2.15), как совокупности взаимодействующих объектов для $i=(1-3)$, будет иметь вид (рис. 3.25–3.27).

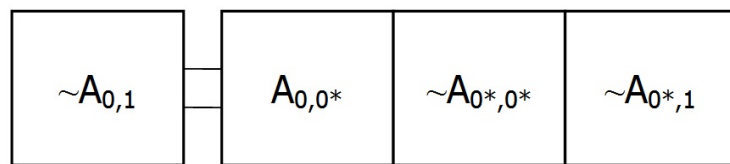


Рис. 3.25. Объектное представление $\tilde{A}_{0,1} = A_{0,0^*} A_{0^*,0^*} \tilde{A}_{0^*,1}$

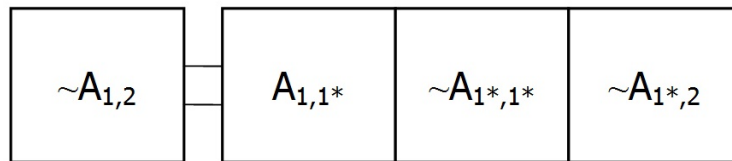


Рис. 3.26. Объектное представление $\tilde{A}_{1,2} = A_{1,1^*} A_{1^*,1^*} \tilde{A}_{1^*,2}$

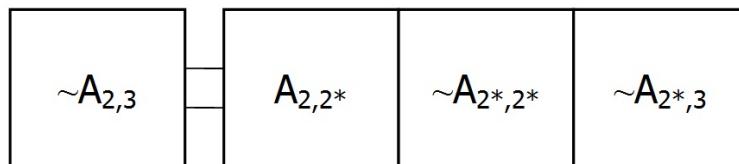


Рис. 3.27. Объектное представление $\tilde{A}_{2,3} = A_{2,2^*} A_{2^*,2^*} \tilde{A}_{2^*,3}$

Рассмотрим математическую модель (2.16), определяющую относительное положение каждого звена манипуляционной системы относительно неподвижной системы координат. Матрицы $\tilde{A}_{0,k}$, стоящие в левой части уравнения, определяющего данную математическую модель, являются объектами класса Modif_matrix_Aok . Матрицы $\tilde{A}_{(i-1),i}$, стоящие в правой части этого уравнения, соответствуют классу Modif_matrix_Aij .

На рис. 3.28 представлена математическая модель (2.16) как совокупность трёх взаимодействующих объектов, соответствующая модифицированной геометрической модели трёхзвенной манипуляционной системы.

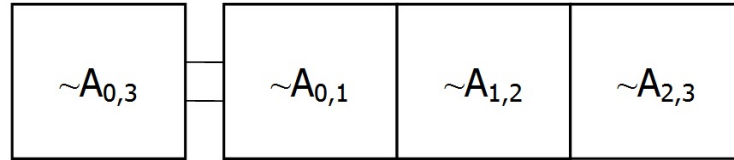


Рис. 3.28. Объектное представление $\tilde{A}_{0,3} = \tilde{A}_{0,1} \tilde{A}_{1,2} \tilde{A}_{2,3}$

Элементы объектной схемы (рис. 3.28) могут быть заданы составляющими их базовыми элементами, представленными на рис. 3.25–3.27 (рис. 3.29).

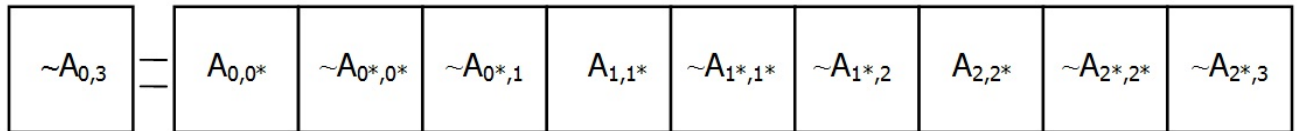


Рис. 3.29. Объектное представление модифицированной геометрической модели трёхзвенной манипуляционной системы

Могут быть использованы различные комбинированные формы представления геометрических моделей (рис. 3.30–3.31).

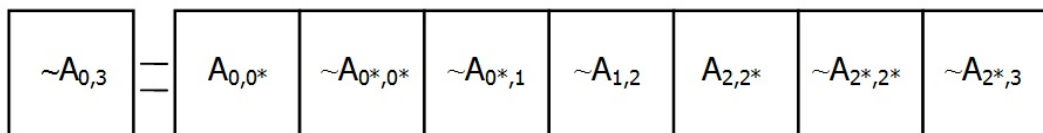


Рис. 3.30. Комбинированное объектное представление модифицированной геометрической модели трёхзвенной манипуляционной системы

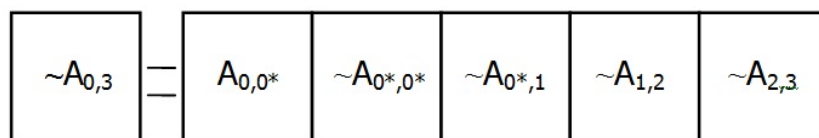


Рис. 3.31. Альтернативное объектное представление модифицированной геометрической модели трёхзвенной манипуляционной системы

3.2.3 Анализ сложности вычисления матричных объектов

3.2.3.1 Ассоциативность и вычислительная сложность матричных операций

Проанализируем вычислительную сложность выполнения матричных операций и их комбинаций, основываясь на сопоставлении количеств операций сложения и умножения, выполняемых при этом с элементами матриц. Сопоставим количество операций сложения (+) и умножения (\times), совершаемых с элементами матриц размерности $n \times n$ и векторов размерности $n \times 1$, при выполнении некоторых матричных выражений.

Умножение двух матриц

$$C = A B, \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

При умножении двух матриц размерности $n \times n$ количество операций сложения равно $K_+ = n^2(n-1)$, а количество операций умножения $K_\times = n^3$.

Умножение матрицы на вектор

$$V = A R, \quad v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

При умножении матрицы размерности $n \times n$ на вектор размерности $n \times 1$ количество операций сложения равно $K_+ = n(n-1)$, а количество операций умножения $K_\times = n^2$.

Матричное уравнение, отражающее свойство ассоциативности

$$\left(\begin{matrix} (n \times n) & (n \times n) \\ A & + & B \end{matrix} \right) \begin{matrix} (n \times 1) \\ V \end{matrix} = \begin{matrix} (n \times n) & (n \times 1) \\ A & V \end{matrix} + \begin{matrix} (n \times n) & (n \times 1) \\ B & V \end{matrix}. \quad (3.3)$$

В левой части, рассматриваемого матричного уравнения, количество операций сложения равно $K_+^{(L)} = n^2 + n(n-1) = n(2n-1)$, а количество операций умножения $K_\times^{(L)} = n^2$. В правой части количество операций сложения равно $K_+^{(R)} = 2n(n-1) + n = n(2n-1) = K_+^{(L)}$, а количество операций умножения $K_\times^{(R)} = 2K_\times^{(L)} = 2n^2$. Полученный

результат по количеству операций сложения не столь очевиден как результат по количеству операций умножения.

В более общем случае матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} (n \times n) & (n \times n) \\ A_1 + \dots + A_k \end{pmatrix}^{(n \times 1)} V = A_1^{(n \times n)(n \times 1)} V + \dots + A_k^{(n \times n)(n \times 1)} V \quad (3.4)$$

в левой части этого уравнения количество операций сложения будет равно $K_+^{(L)} = n(kn-1)$, а количество операций умножения $K_\times^{(L)} = n^2$. В правой части количество операций сложения будет равно $K_+^{(R)} = K_+^{(L)} = n(kn-1)$, а количество операций умножения $K_\times^{(R)} = kK_\times^{(L)} = kn^2$.

Рассмотрим произведение двух матриц и вектора

$$\begin{pmatrix} (n \times n)(n \times n) \\ A \ B \end{pmatrix}^{(n \times 1)} V = A^{(n \times n)} \begin{pmatrix} (n \times n)(n \times 1) \\ B \ V \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Количество операций сложения в левой части матричного уравнения (3.5) равно $K_+^{(L)} = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$, а в правой части $K_+^{(R)} = 2n(n-1)$. Отношение этих коэффициентов показывает

$$\frac{K_+^{(L)}}{K_+^{(R)}} = \frac{n+1}{2}, \Rightarrow K_+^{(L)} \succ K_+^{(R)}. \quad (3.6)$$

Количество операций умножения в левой части матричного уравнения (3.5) равно $K_\times^{(L)} = n^2(n+1)$, а в правой части $K_\times^{(R)} = 2n^2$. Отношение этих коэффициентов показывает

$$\frac{K_\times^{(L)}}{K_\times^{(R)}} = \frac{n+1}{2}, \Rightarrow K_\times^{(L)} \succ K_\times^{(R)}. \quad (3.7)$$

Более общий случай представляет собой произведение нескольких матриц и вектора

$$\begin{pmatrix} (n \times n) & (n \times n) \\ A_1 \ \dots \ A_k \end{pmatrix}^{(n \times 1)} V = A_1^{(n \times n)} \dots \left(A_{k-1}^{(n \times n)} \begin{pmatrix} (n \times n)(n \times 1) \\ A_k \ V \end{pmatrix} \right). \quad (3.8)$$

Количество операций сложения в левой части матричного уравнения (3.8) равно $K_+^{(L)}=n^2(n-1)(k-1)+n(n-1)=n(n-1)((k-1)n+1)$, а в правой части $K_+^{(R)}=kn(n-1)$. Отношение этих коэффициентов показывает

$$\frac{K_+^{(L)}}{K_+^{(R)}} = \frac{(k-1)n+1}{k}, \Rightarrow k=3, n=4, \frac{K_+^{(L)}}{K_+^{(R)}} = 3. \quad (3.9)$$

Количество операций умножения в левой части матричного уравнения (3.8) равно $K_\times^{(L)}=n^2((k-1)n+1)$, а в правой части $K_\times^{(R)}=kn^2$. Отношение этих коэффициентов показывает

$$\frac{K_\times^{(L)}}{K_\times^{(R)}} = \frac{(k-1)n+1}{k}, \Rightarrow k=3, n=4, \frac{K_\times^{(L)}}{K_\times^{(R)}} = 3. \quad (3.10)$$

Проведенный анализ сложности матричных вычислений, соответствующих наиболее распространённым формам аналитических выражений, представленных в математических моделях, описывающих движение манипуляционных систем, показывает, что использование свойства ассоциативности матричных вычислений позволяет существенно снизить количество выполняемых арифметических операций.

3.2.3.2 Матрицы промежуточных преобразований

При вычислении матриц частных производных от матриц преобразования однородных координат (см. п.п. 1.1.7) можно использовать матрицы промежуточных преобразований однородных координат. Например,

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = A_{0,i} D_i A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = A_{0,i} D_i A_{i,k}, \quad i=(1, \dots, k). \quad (3.12)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i^2} = A_{0,i} D_i D_i A_{i,k}, \quad i=(1, \dots, k), \quad (3.13)$$

где $A_{i,k}$ – матрицы промежуточных преобразований однородных координат.

Матрицы $A_{0,i}$ входят в состав множества матриц преобразования однородных координат, составляющих геометрическую модель манипуляционных систем, и определяются на основе выражения

$$A_{0,i} = \prod_{j=1}^i A_{(j-1),j}. \quad (3.14)$$

Сравним количества операций умножения матриц, необходимых при вычислении выражений (3.11 и 3.12)

$$K = \frac{K^{(4.24)}}{K^{(4.25)}} = \frac{1+k-i}{2}. \quad (3.15)$$

Для трёхзвенной манипуляционной системы при $k=3$ и $i=1$ коэффициент отношения (3.15) $K=1.5$, а для шестизвенной манипуляционной системы при $k=6$ и $i=1$ имеем $K=3$.

3.2.3.3 Расширенная геометрическая модель

Анализ результатов, получаемых на основе выражения (3.15), показывающих высокую эффективность применения матриц промежуточных преобразований при вычислении частных производных от матриц преобразования однородных координат на основе выражений (3.12 и 3.13), позволяет перейти к выводу о целесообразности внесения этих матриц во множество матриц преобразования однородных координат, составляющих геометрическую модель манипуляционных систем.

Таким образом, в блоке описания данных класса `Geometric_model` должны быть указаны переменные, в той или иной форме, представляющие рассмотренные матрицы промежуточных преобразований однородных координат. Например, для этого может быть использован многомерный массив, позволяющий индекси-

ровать положение в нём элементов этих матриц. Количество матриц в массиве определяется количеством звеньев в моделируемой манипуляционной системе.

Множество создаваемых матриц промежуточных преобразований однородных координат будет иметь вид

$$\{ A_{1,n}, \dots, A_{(n-1),n} \}. \quad (3.16)$$

Количество элементов множества (3.16) определяется выражением

$$N=n-1, \quad (3.17)$$

где n – количество звеньев в манипуляционной системе.

Также, должны быть определены методы, позволяющие инициализировать объекты, соответствующие данным матрицам, и реализующие необходимые операции с ними.

На рис. 3.32 представлен эскиз кода, схематично отражающего структуру расширенного класса `Geometric_model`.

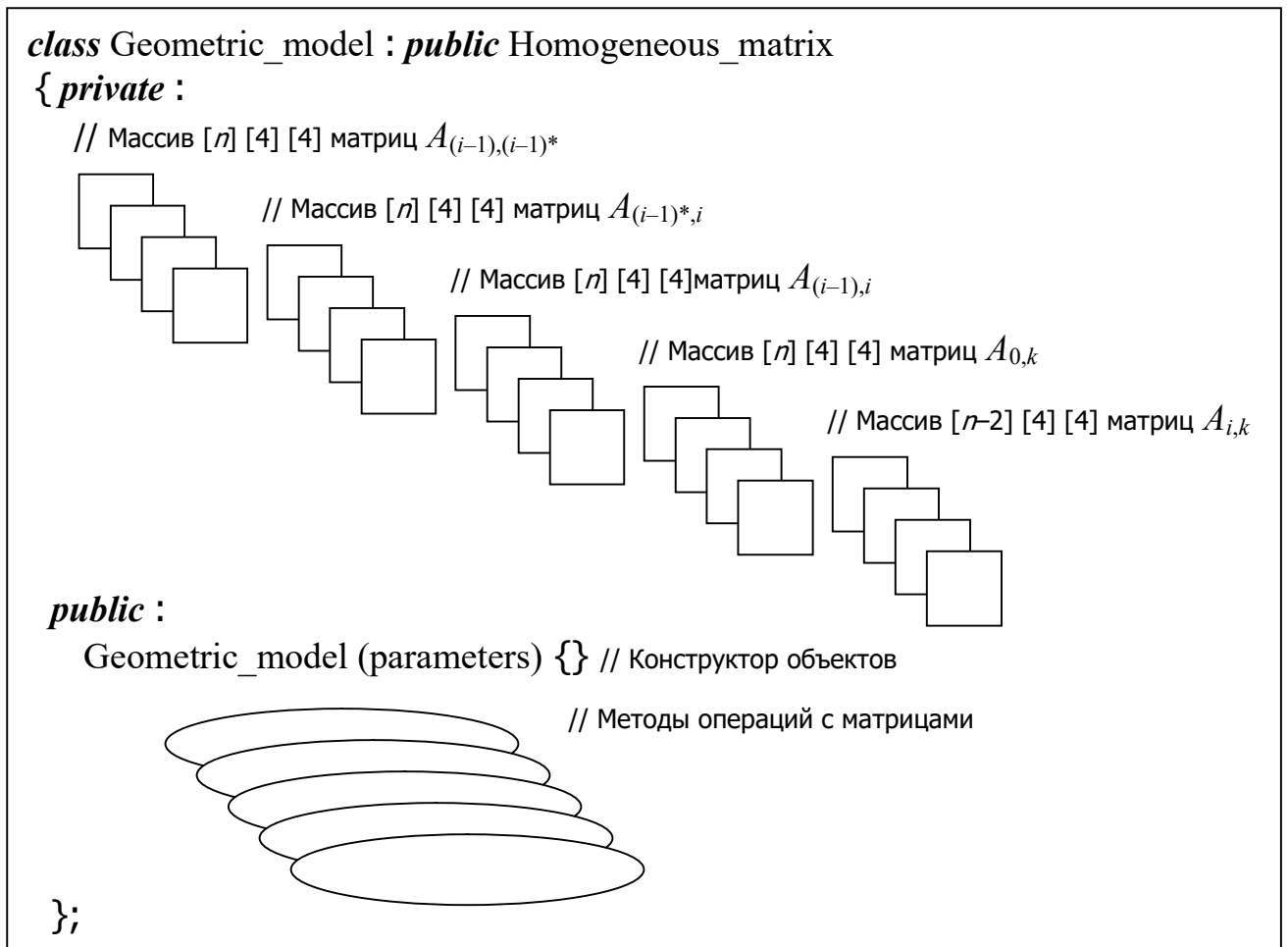


Рис. 3.32. Структура расширенного класса `Geometric_model`

3.2.4 Объектное моделирование кинематических параметров

3.2.4.1 Класс векторов

Предлагаемая методология моделирования кинематики манипуляционных систем роботов рассматривает математические модели для вычисления кинематических параметров манипуляционных систем как результат соответствующего преобразования их геометрических моделей. Такие математические модели помимо матриц преобразования однородных координат (см. п.п. 1.1.6) содержат также и векторы.

Кинематические параметры (линейные и угловые) манипуляционных систем представляются расширенными векторами. Поэтому реализация визуального конструирования математических моделей, лежащих в основе алгоритмов решения прямой задачи кинематики (см. п.п. 1.1.5), предполагает использование объектов, моделирующих такие вектора.

Первоначально, как и в случае матриц, создадим базовый класс `Vector` для представления векторов произвольной размерности. Создание данного класса может не понадобиться, если в структуре определённого ранее базового класса `Matrix` предусмотрены данные и методы, учитывающие особенности использования матриц-строк и столбцов.

Для моделирования расширенных векторов создадим класс `Advanced_vector`, наследующий данные и методы базового класса `Vector`. В этом классе дополнительно опишем данные необходимые для представления расширенных векторов, имеющих размерность 4×1 , и методы, реализующие необходимые операции с ними и матрицами размерности 4×4 (рис. 3.33).

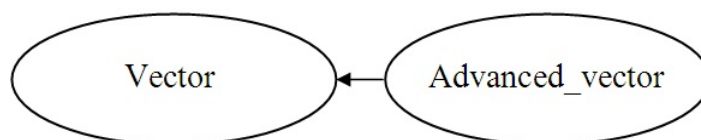


Рис. 3.33 Наследственная цепочка класса `Advanced_vector`

Объектами созданного класса могут быть представлены радиус-векторы, векторы скоростей и ускорений. При формировании объектов, моделирующих расширенные радиус-вектора компонента объектов, соответствующая четвёртому элементу вектора, должен быть инициализирована единицей, а при формировании объектов моделирующих скользящие или свободные векторы – нулём.

Элементы объектной схемы, соответствующие объектам класса `Advanced_vector`, будем обозначать прямоугольниками. Одна сторона таких прямоугольников должна быть равна стороне квадрата, представляющего объект класса `Homogeneous_matrix` или производных от него классов, а другая сторона равна не более четверти первой. Положение и ориентация данного элемента в графической модели должны соответствовать представлению вектора в виде столбца или строки.

Умножение объекта `V1` класса `Advanced_vector`, представляющего вектор-строку (1×4), на объект `V2` этого же класса, представляющего вектор-столбец (4×1), с присвоением результата объекту `M` класса `Matrix`, представляющему матрицу (4×4), может быть представлено схематично (рис. 3.34).

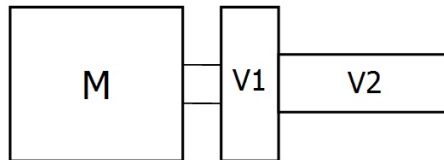


Рис. 3.34 Умножение векторов

Схема объектного представления выражения (1.12), называемого функцией положения, для случая, когда $k=2$ имеет вид (рис. 3.35).

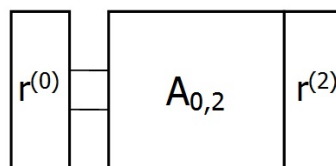


Рис. 3.35 Объектная схема функции положения

3.2.4.2 Класс матриц дифференцирования

При вычислении кинематических параметров выполняется операция дифференцирования матриц преобразования однородных координат, данная операция может быть выполнена с использованием специальных матриц (см. п.п. 1.1.7). Матрицы дифференцирования могут быть представлены объектами специального класса `Dif_homogeneous_matrix`, являющегося производным от класса `Matrix` (рис. 3.36), описанного в п.п. 3.2.1.1.

```
class Dif_homogeneous_matrix : public Matrix
```

Рис. 3.36 Объявление класса `Dif_homogeneous_matrix`

Структурно объекты класса `Dif_homogeneous_matrix` аналогичны объектам класса `Homogeneous_matrix`. Например, объектные схемы, соответствующие выражениям (1.23) для случая $i=2, j=4$ и $k=6$ будут иметь вид (рис. 3.37–3.39).

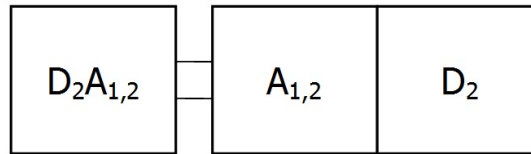


Рис. 3.37. Модель $\frac{\partial A_{1,2}}{\partial q_2} = A_{1,2} D_2$

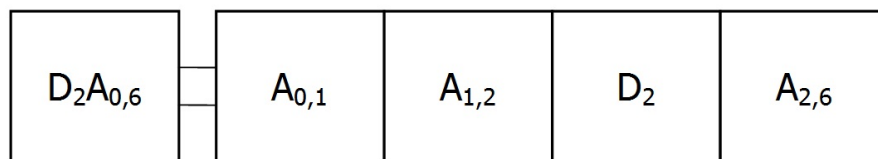


Рис. 3.38. Модель $\frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_2} = A_{0,1} A_{1,2} D_2 A_{2,6}$

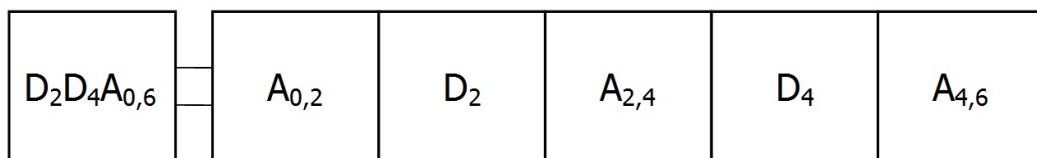


Рис. 3.39. Модель $\frac{\partial^2 A_{0,6}}{\partial q_2 \partial q_4} = A_{0,2} D_2 A_{2,4} D_4 A_{4,6}$

На рис. 3.37–3.39 объекты D_2 и D_4 соответствуют классу `Dif_homogeneous_matrix`, а объекты $D_2A_{0,6}$ и $D_2D_4A_{0,6}$ – классу `Homogeneous_matrix`. Объекты $A_{2,4}$ и $A_{4,6}$ отражают матрицы $A_{2,4}$ и $A_{4,6}$ и могут быть представлены объектами классов специальных матриц (рис. 3.40), входящих в состав расширенной геометрической модели манипуляционной системы (см. п.п. 3.2.3.3).

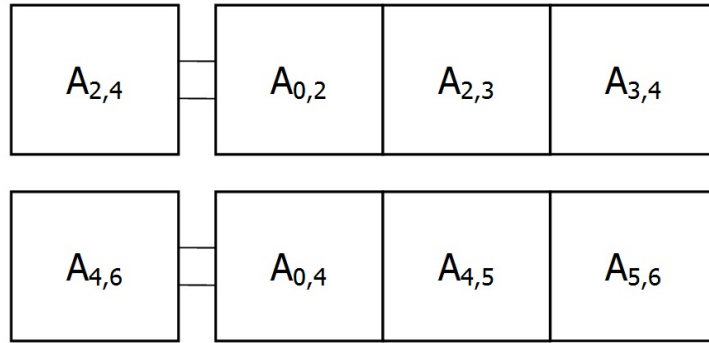


Рис. 3.40 Объектное представление матриц $A_{2,4}$ и $A_{4,6}$

3.2.4.3 Объектные схемы вычисления кинематических параметров

Рассмотрим математическую модель (1.13) для случая $k=3$, представляющую собой выражение для вычисления линейной скорости некоторой точки 3-го звена в неподвижной системе координат S_0 , заданной своим радиусом вектором $r^{(3)}$ в системе координат S_3 .

$$V^{(0)} = \left(\frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) r^{(3)}. \quad (3.18)$$

С учетом (1.23) выражение (3.18) может быть представлено выражением

$$V^{(0)} = (\dot{q}_1 A_{0,1} D_1 A_{1,2} A_{2,3} + \dot{q}_2 A_{0,1} A_{1,2} D_2 A_{2,3} + \dot{q}_3 A_{0,1} A_{1,2} A_{2,3} D_3) r^{(3)}. \quad (3.19)$$

Анализ вычислительной сложности математической модели (3.19), основывающийся на результатах, представленных в п.п. 3.2.3.1, показывает, что количество операций сложения при выполнении данного выражения $K_+^{(3.19)} = 9n^3 - 6n^2 - n$, при $n=4$ равно $K_+^{(3.19)} = 476$, а количество операций умножения $K_\times^{(3.19)} = 9n^3 + 4n^2$, при $n=4$ равно $K_\times^{(3.19)} = 640$.

На основе результатов (3.9 и 3.10) можно предположить, что приведение выражения (3.19) к виду (3.20) позволит уменьшить количество выполняемых операций сложения и умножения.

$$V^{(0)} = \dot{q}_1 \left(A_{0,1} \left(D_1 \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) + \dot{q}_2 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(D_2 \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) + \dot{q}_3 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} \left(D_3 r^{(3)} \right) \right) \right) \right), \quad (3.20)$$

Количество операций сложения при выполнении выражения (3.20) $K_+^{(3.20)} = 2n(6n-5)$, при $n=4$ равно $K_+^{(3.20)} = 152$, а количество операций умножения $K_\times^{(3.20)} = 15n^2$, при $n=4$ равно $K_\times^{(3.20)} = 240$.

Отношение коэффициентов, полученных для математических моделей (3.19) и (3.20) при $n=4$ показывает

$$\frac{K_+^{(3.19)}}{K_+^{(3.20)}} = 3.13, \quad \frac{K_\times^{(3.19)}}{K_\times^{(3.20)}} = 2.67. \quad (3.21)$$

Объектная схема математической модели (3.20), в соответствии с принятой формой представления (см. рис. 3.38), будет иметь вид (рис. 3.41). Операции над объектами, представленными на схеме, выполняются строго в последовательности сверху вниз и справа на лево, полученный результат вычислений присваивается объекту, стоящему слева от оператора присваивания.

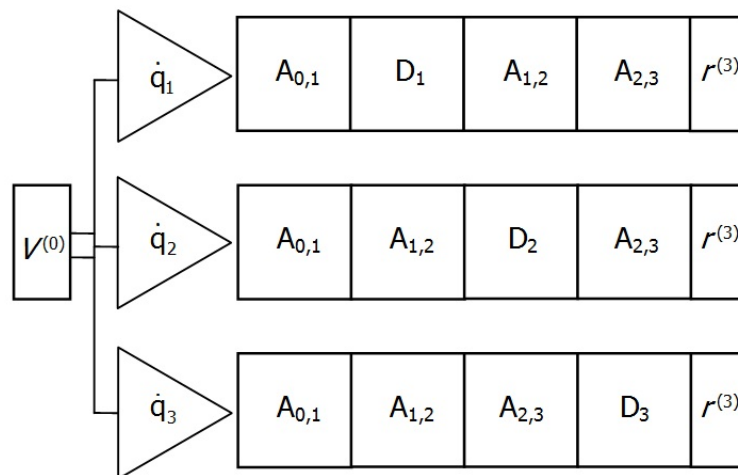


Рис. 3.41 Объектная схема математической модели (3.20)

При составлении объектной схемы математической модели (3.20) помимо схематичного представления дифференцирования матриц преобразования однородных координат учтены свойства (3.4 и 3.8), а также использовано схематичное

представление операции суммирования и введено представление операции умножения объекта класса `Homogeneous_matrix` на скаляр.

Объект, соответствующий скаляру, будем представлять на объектных схемах треугольным элементом. Операцию умножения объекта на скаляр будем изображать примыканием треугольника одной из своих вершин к стороне прямоугольника, изображающего объект, умножаемый на скаляр (см. рис. 3.41).

Рассмотрим математическую модель (1.14) для случая $k=3$, представляющую собой выражение для вычисления линейного ускорения некоторой точки 3-го звена манипуляционной системы в неподвижной системе координат S_0 .

$$a^{(0)} = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} \ddot{q}_2 + \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_3} \ddot{q}_3 + \\ + \frac{\partial^2 A_{0,3}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial^2 A_{0,3}}{\partial q_2^2} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial^2 A_{0,3}}{\partial q_3^2} \dot{q}_3^2 + \\ + 2 \left(\frac{\partial^2 A_{0,3}}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 A_{0,3}}{\partial q_1 \partial q_3} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \frac{\partial^2 A_{0,3}}{\partial q_2 \partial q_3} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right) \end{array} \right) r^{(3)}. \quad (3.22)$$

С учетом (1.23) выражение (3.22) может быть представлено выражением

$$a^{(0)} = \left(\begin{array}{l} \ddot{q}_1 A_{0,1} D_1 A_{1,2} A_{2,3} + \ddot{q}_2 A_{0,1} A_{1,2} D_2 A_{2,3} + \ddot{q}_3 A_{0,1} A_{1,2} A_{2,3} D_3 + \\ + \dot{q}_1^2 A_{0,1} D_1 D_1 A_{1,2} A_{2,3} + \dot{q}_2^2 A_{0,1} A_{1,2} D_2 D_2 A_{2,3} + \dot{q}_3^2 A_{0,1} A_{1,2} A_{2,3} D_3 D_3 + \\ + 2(\dot{q}_1 \dot{q}_2 A_{0,1} D_1 A_{1,2} D_2 A_{2,3} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 A_{0,1} D_1 A_{1,2} A_{2,3} D_3 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 A_{0,1} A_{1,2} D_1 A_{2,3} D_3) \end{array} \right) r^{(3)}. \quad (3.23)$$

Анализ вычислительной сложности математической модели (3.23) (см. п.п. 3.2.3.1), показывает, что количество операций сложения при выполнении данного выражения $K_+^{(3.23)} = 33n^3 - 24n^2 - n$, при $n=4$ равно $K_+^{(3.23)} = 1724$, а количество операций умножения $K_\times^{(3.23)} = 11n^2(3n+1)$, при $n=4$ равно $K_\times^{(3.23)} = 2288$.

Основываясь на результатах (3.9 и 3.10), аналогично выполненным преобразованиям математической модели (3.19), преобразуем математическую модель (3.23) к виду (3.24). Математическая модель (3.24) позволяет уменьшить количество выполняемых операций сложения и умножения.

$$\begin{aligned}
a^{(0)} = & \ddot{q}_1 \left(A_{0,1} \left(D_1 \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) + \ddot{q}_2 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(D_2 \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) + \ddot{q}_3 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} \left(D_3 r^{(3)} \right) \right) \right) \right) + \\
& + \dot{q}_1^2 \left(A_{0,1} \left(D_1 \left(D_1 \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) \right) + \dot{q}_2^2 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(D_2 \left(D_2 \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) \right) + q_3^2 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} \left(D_3 \left(D_3 r^{(3)} \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \left(A_{0,1} \left(D_1 \left(A_{1,2} \left(D_2 \left(A_{2,3} r^{(3)} \right) \right) \right) \right) \right) + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 \left(A_{0,1} \left(D_1 \left(A_{1,2} \left(A_{2,3} \left(D_3 r^{(3)} \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 \left(A_{0,1} \left(A_{1,2} \left(D_1 \left(A_{2,3} \left(D_3 r^{(3)} \right) \right) \right) \right) \right). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Количество операций сложения при выполнении выражения (3.24) $K_+^{(3.24)}=2n(21n-17)$, при $n=4$ равно $K_+^{(3.24)}=536$, а количество операций умножения $K_\times^{(3.24)}=51n^2+9$, при $n=4$ равно $K_\times^{(3.24)}=825$.

Отношение коэффициентов, полученных для математических моделей (3.23 и 3.24) при $n=4$ показывает

$$\frac{K_+^{(3.23)}}{K_+^{(3.24)}} = 3.22, \quad \frac{K_\times^{(3.23)}}{K_\times^{(3.24)}} = 2.77. \tag{3.25}$$

Схема объектного представления математической модели (3.24) будет иметь вид (рис. 3.42).

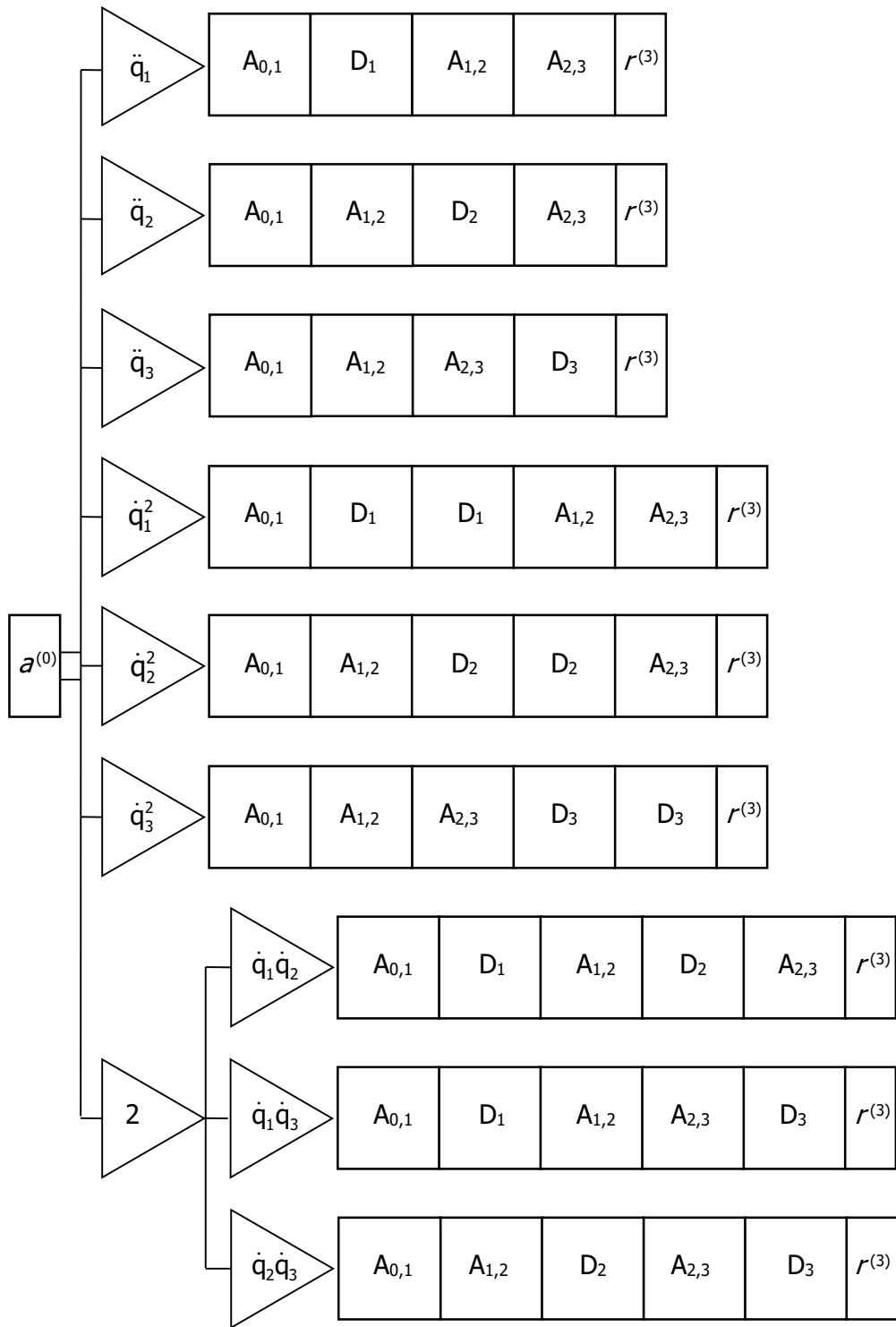


Рис. 3.42 Объектное представление математической модели (3.24)

3.2.5 Объектная схема алгоритма обратной задачи кинематики манипуляционных систем

Постановка большинства траекторных задач при моделировании кинематики манипуляционных систем роботов основывается на решении обратной задачи кинематики. Данная задача сводится к составлению и решению уравнений связей, представляющих собой, в общем случае, системы нелинейных алгебраических уравнений. Наиболее распространённые численные методы решения таких систем уравнений основываются на использовании матрицы Якоби (см. п.п. 1.1.8).

Для объектного представления матрицы Якоби необходимо создать на основе класса `Matrix` класс `Matrix_Jacobi`, моделирующих эти матрицы (рис. 3.43).

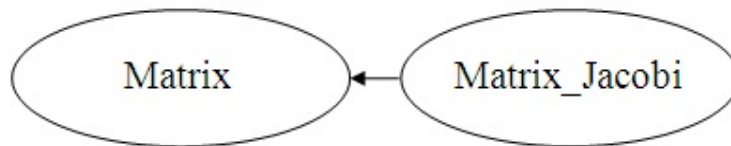


Рис. 3.43 Наследственная цепочка класса `Matrix_Jacobi`

Классы объектов, моделирующих матрицы, должны содержать методы, позволяющие реализовывать поэлементное представление матриц. Такое представление может быть организовано на основе упорядоченного множества, содержащего элементы матриц. Упорядочение может быть реализовано путём индексирования элементов по их положению в строках и столбцах матриц. Например, матрица $[J]$ размерности $n \times n$ может быть представлена упорядоченным множеством своих элементов $[J] = [J_{ij}]$, $(i, j = 1, \dots, n)$, где i – номер строки, а j – номер столбца. При программировании матриц часто используют массивы, в частности двумерные массивы, позволяющих организовать доступ к элементам матриц по двум их индексам. Возможны и другие способы программирования.

Если элементы матриц представляют собой объекты, то в описании класса, соответствующего таким матрицам, должны содержаться методы, позволяющие представлять объектные схемы элементов и выполнять по этим схемам вычисление их значений. Например, объект, представляющий матрицу Якоби размерности

3×3 ($n=3$), может быть представлен в виде упорядоченного множества 9-и своих элементов, каждому из которых поставлена в соответствие его объектная схема.

Элементу, находящемуся на пересечении 2-й строки и 3-го столбца матрицы Якоби, будет соответствовать объект J_{23} , реализующий объектную схему вычисления выражения (рис. 3.44)

$$J_{23} = j_0^T \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_3} r^{(3)}. \quad (3.26)$$

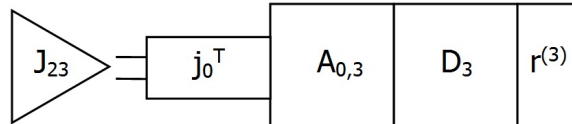


Рис. 3.44. Объектная схема вычисления выражения (3.26)

Для элемента, находящегося на пересечении 3-й строки и 1-го столбца матрицы Якоби, будет соответствовать объект J_{31} , реализующий объектную схему вычисления выражения (рис. 3.45)

$$J_{31} = k_0^T \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} r^{(3)}. \quad (3.27)$$

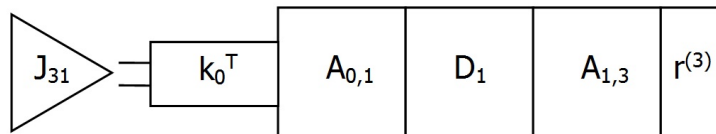


Рис. 3.45. Объектная схема вычисления выражения (3.27)

В объектной схеме (рис. 3.47), использован объект $A_{1,3}$, соответствующий матрице $A_{1,3}$, представленной в расширенной геометрической модели манипуляционных систем (см. п.п. 3.2.3.3).

Объектная схема алгоритма решения обратной задачи кинематики, построенного на основе численного метода (1.32), основывающегося на обращении матрицы Якоби (см. п.п. 1.1.9), будет иметь вид

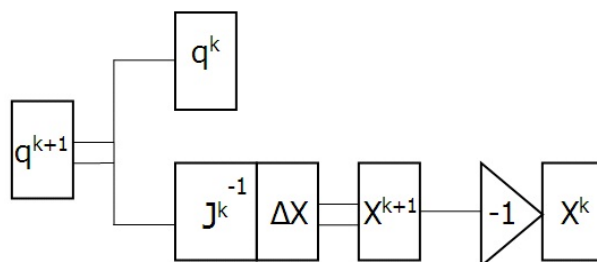


Рис. 3.46. Объектная схема алгоритма решения обратной задачи кинематики

3.3 Объектное моделирование динамики манипуляционных систем роботов

3.3.1 Классы и объекты инерционных моделей

3.3.1.1 Классы `Inertial_matrix` и `Inertial_model`

По аналогии с разработанным ранее классом `Geometric_model`, используя класс `Matrix`, создадим сначала класс `Inertial_matrix`, содержащий структуру матриц инерции и методы, выполняющие их инициализацию и операции с ними, и на основе уже этого класса создадим класс `Inertial_model` (рис. 3.47).

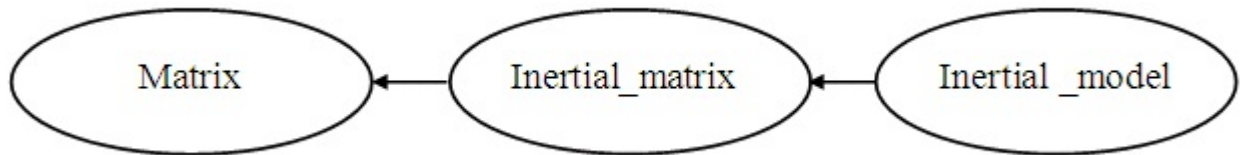


Рис. 3.47. Наследственная цепочка класса `Inertial_model`

На рис. 3.48 представлен эскиз кода, схематично отражающего структуру класса `Inertial_model`.

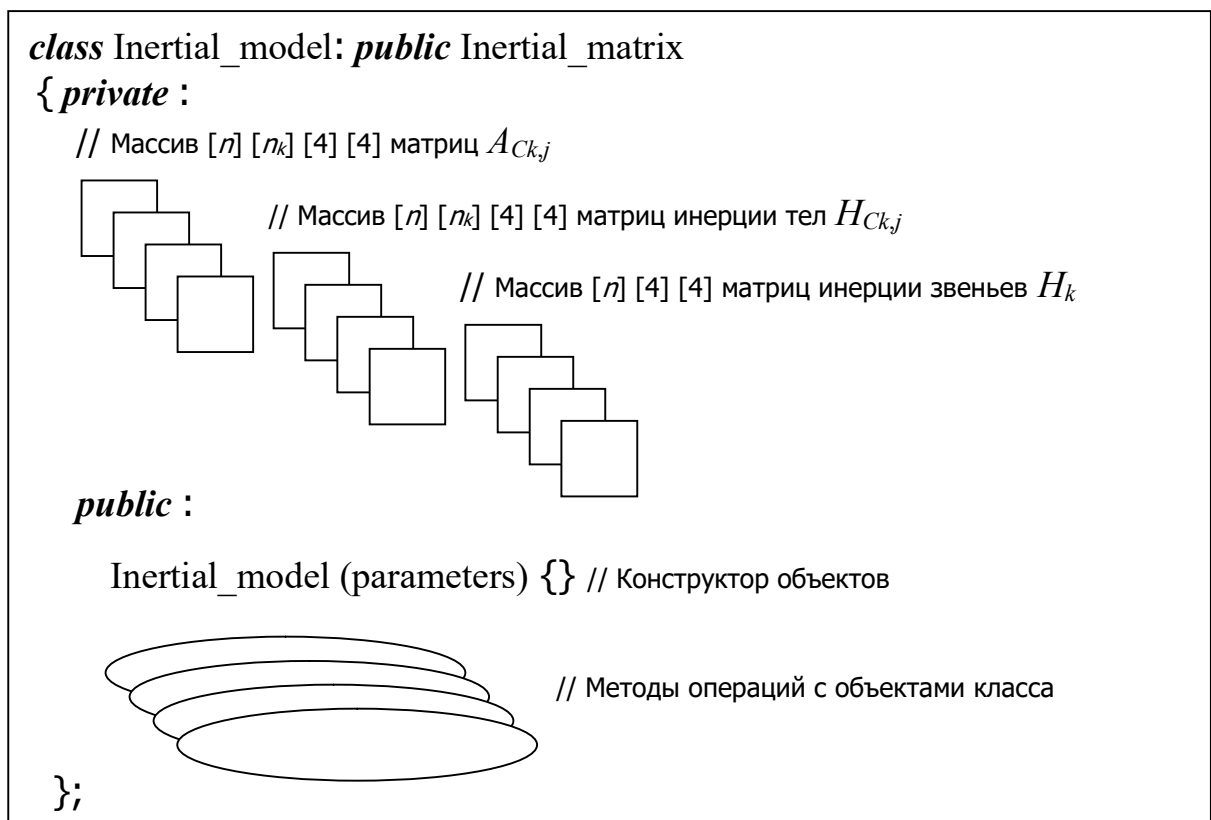


Рис. 3.48. Структура класса `Inertial_model`

Связь производного класса с базовым определяется строкой кода

class Inertial_model: *public* Inertial_matrix.

Перед описанием методов класса присутствует конструктор объектов данного класса. Конструктор класса – это метод данного класса выполняющийся автоматически при объявлении объекта данного класса. Конструктор представляет собой функцию с именем, совпадающим с именем своего класса.

Например, строка кода

Inertial_model (parameters) {}

представляет собой вызов функции (подпрограммы) конструктора с именем Inertial_model, которая на основе, передаваемых ей (в неё) параметров (parameters), соответствующих описанным ранее параметрам (ZP , KJ , RC , OR , GP), являющимся исходными данными, описывающими распределение масс в звеньях манипуляционных систем, формирует массивы матриц преобразования однородных координат $A_{Ck,j}$ и матриц инерции тел $H_{Ck,j}$, для каждого звена манипуляционной системы. Далее конструктор реализует алгоритм, соответствующий описанной ранее методике построения инерционных моделей, и формирует матрицы инерции H_k .

В случае если используется инерционная модель, сформированная ранее и сохранённая в банке инерционных моделей, то это отражается в передаваемых конструктору параметрах (ZP , KJ , RC , OR , GP), что позволит напрямую загрузить готовую инерционную модель и проинициализировать ею создаваемый объект класса Inertial_model.

Стандарт объектно-ориентированного языка программирования C++ позволяет при описании классов использовать несколько конструкторов. Выбор нужного конструктора осуществляется по виду и количеству параметров, указанных для соответствующего объекта при его создании (см. п.п. 1.2.5).

Пример объявления объектов класса Inertial_model

Inertial_model Object1 (ZP , KJ , RC , OR , GP), Object2 (ZP , KJ), Object3;

с полным набором параметров, с частичным набором и без параметров.

3.3.1.2 Объектное представление инерционных моделей

При объектном представлении математических моделей (1.63 и 1.64), составляющих основу разработанной методики создания инерционных моделей манипуляционных систем роботов, необходимо использовать объекты двух классов `Homogeneous_matrix` и `Inertial_matrix`.

Объекты, соответствующие классу `Homogeneous_matrix`, моделируют матрицы преобразования однородных координат $A_{Ck,j}$, определяющие взаимное смещение и ориентацию центральных систем координат тел и локальных систем координат k -го звена.

Объекты, соответствующие классу `Inertial_matrix`, моделируют матрицы инерции тел $H_{Ck,j}$, $H_{k,j}$ и звеньев H_k .

Рассмотрим инерционную модель трёхзвенной манипуляционной системы. Пусть первое звено этой манипуляционной системы моделируется, например, одним телом, второе – двумя телами, а третье – тремя. Данная инерционная модель может быть представлена в объектном виде (рис. 3.50).

На схеме рассматриваемой инерционной модели, представленной на рис. 3.50, использовано обозначение операции транспонирования объекта класса `Homogeneous_matrix` с присвоением результата другому объекту этого же класса. Выполнение данной комбинированной операции проиллюстрировано на рис. 3.49.

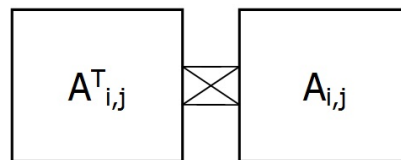


Рис. 3.49. Операция транспонирования

Выполнение операций с объектами, представленными на объектных схемах, производится сверху вниз и с право налево.

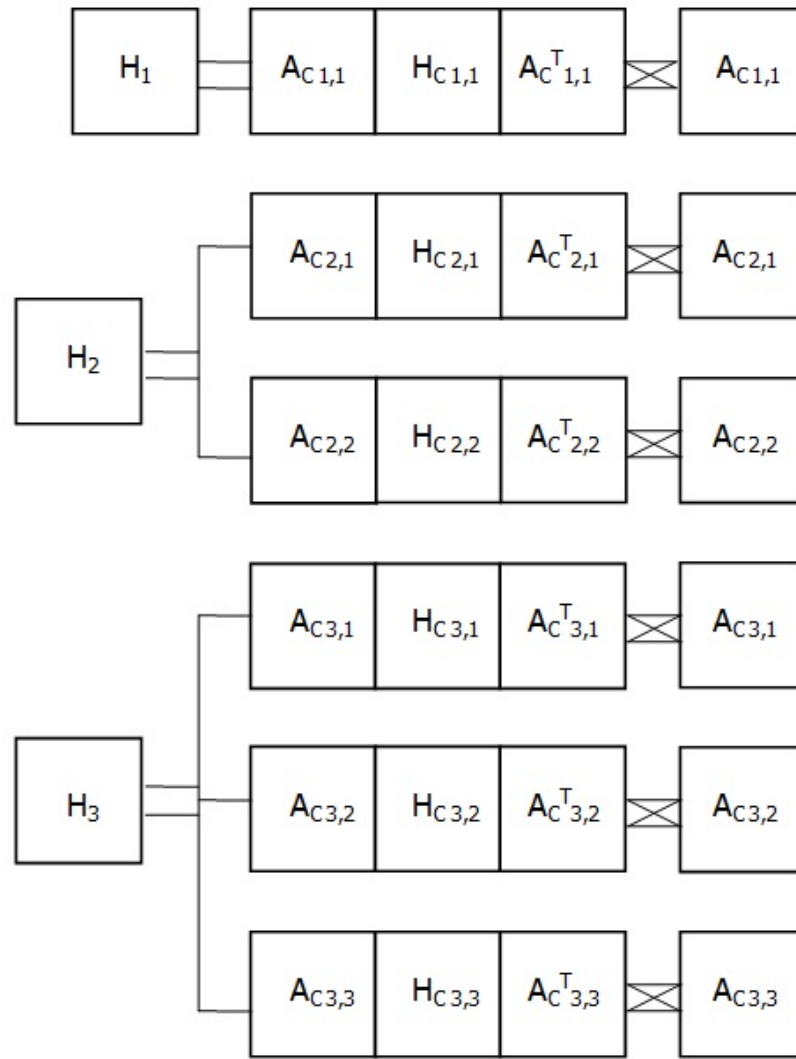


Рис. 3.50. Схема объектного представления инерционной модели

Полученное объектное представление инерционной модели манипуляционных систем будет в дальнейшем использовано при построении динамических моделей манипуляционных систем получаемых на основе уравнений движения (1.94 или 1.95).

3.3.2 Объектно-ориентированное моделирование внешней нагрузки

3.3.2.1 Объектное представление внешних сил

При объектном представлении математической модели (1.80) необходимо использовать объекты определённых ранее классов и объектов, соответствующих классам которые необходимо создать для учёта влияния внешних сил. Так,

например, объекты, моделирующие матрицы $A_{0,k}$, $A_{0,i}$, соответствуют определённому ранее классу `Homogeneous_matrix`.

Для объектов, моделирующих матрицы F_{Rk} и F_{Mki} , отражающие влияние внешних сил и моментов, на основе класса `Matrix` создадим классы `External_force_matrix` и `External_moment_matrix` соответственно (рис. 3.51 и 3.52).

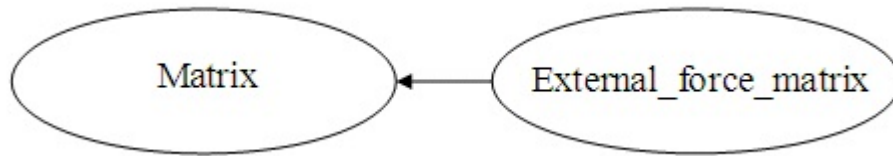


Рис. 3.51 Наследственная цепочка класса `External_force_matrix`

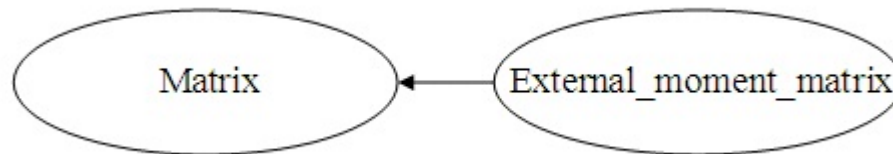


Рис. 3.52 Наследственная цепочка класса `External_moment_matrix`

Также, как и объекты, введенных ранее классов для моделирования специальных матриц (4×4), объекты двух созданных классов будем изображать в графических моделях квадратом. Формирование этих объектов может быть выполнено с использованием объектов класса `Advanced_vector` (см. п.п. 3.2.4.1), соответствующих векторам R_k (7.2), M_k (7.3), Θ_i (7.8), $r_{Ck}^{(k)}$. Объектное представление математических моделей, соответствующих матрицам сил и моментов F_{Rk} и F_{Mki} , определяемых выражениями (1.77) и (1.78), будет иметь вид (рис. 3.53 и 3.54).

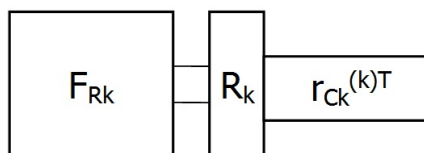


Рис. 3.53 Модель $F_{Rk} = R_k r_{Ck}^{(k)T}$

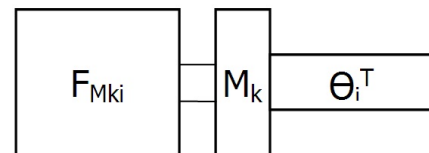


Рис. 3.54 Модель $F_{Mki} = M_k \Theta_i^T$

Объектное представление математической модели (1.80), соответствующей обобщённой силе Q_{F1} , отражающей действие всех внешних сил, представленных своими главными векторами R_k и главными моментами M_k , $k=(1-3)$, приложенными к соответствующим звеньям трёхзвенной манипуляционной системы, на возможных перемещениях первого звена, будет иметь вид (рис. 3.55)

$$Q_{F1} = tr \left(F_{R1} \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial q_1} + F_{M11} A_{0,1}^T \right) + tr \left(F_{R2} \frac{\partial A_{0,2}^T}{\partial q_1} + F_{M21} A_{0,1}^T \right) + tr \left(F_{R3} \frac{\partial A_{0,3}^T}{\partial q_1} + F_{M31} A_{0,1}^T \right). \quad (3.28)$$

Поскольку операции над объектами, представленными в графических моделях, выполняются строго в последовательности сверху вниз и справа на лево, а полученный результат вычислений присваивается объекту, стоящему слева от оператора присваивания, то это позволяет предварительно созданные объекты использовать в нижестоящих операциях.

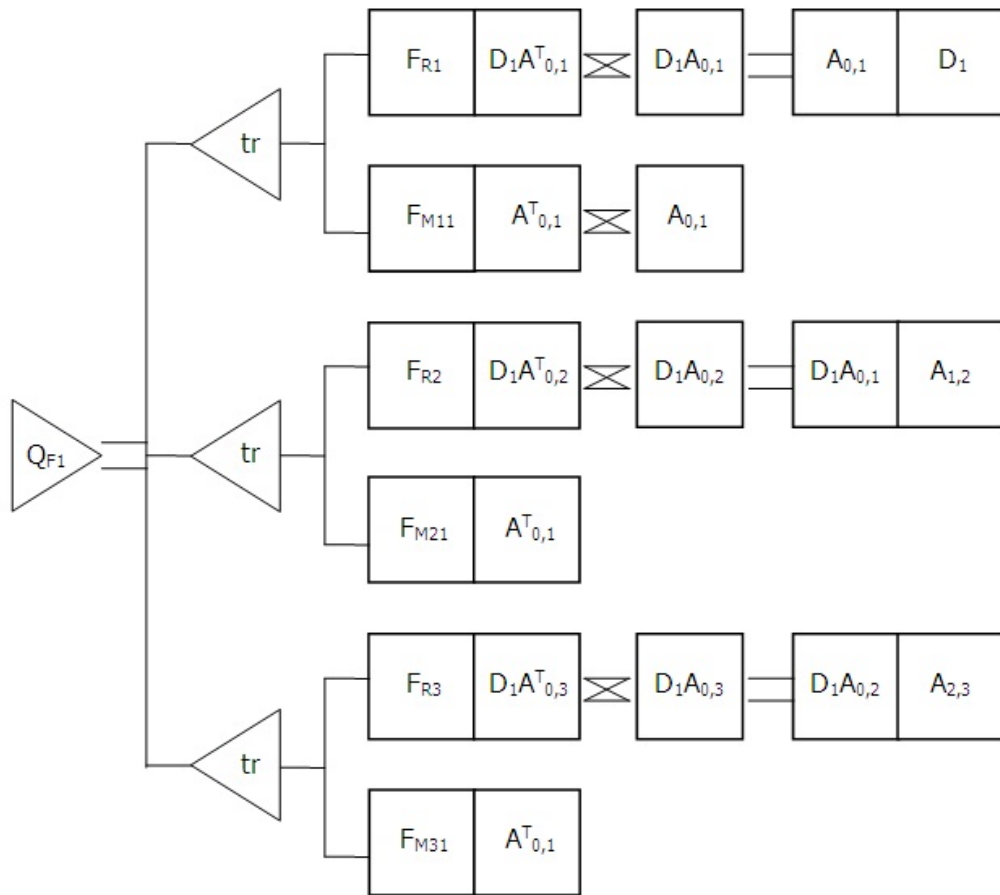


Рис. 3.55 Объектное представление математической модели (3.28)

В объектной схеме модели, представленной на рис. 3.55, использована операция tr вычисления суммы диагональных элементов матрицы. Данная операция изображается треугольником, направленным противоположно изображению скалярной величины.

3.3.2.2 Объектное представление сил тяжести

Объектное представление математической модели (1.87), соответствующей обобщённой силе Q_{G2} , отражающей влияние сил тяжести, приложенных к звеньям трёхзвенной манипуляционной системы, на возможных перемещениях второго звена, будет иметь вид (рис. 3.56)

$$Q_{G2} = tr \left(F_{G2} \frac{\partial A_{0,2}^T}{\partial q_2} \right) + tr \left(F_{G3} \frac{\partial A_{0,3}^T}{\partial q_2} \right). \quad (3.29)$$

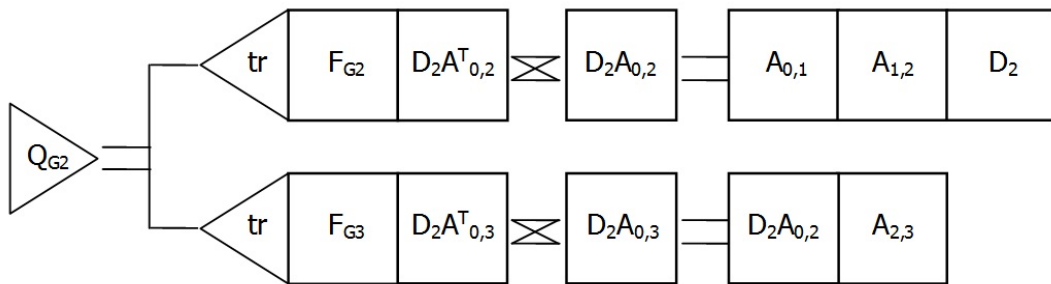


Рис. 3.56 Объектное представление математической модели (3.29)

3.3.3 Классы и объекты динамических моделей

3.3.3.1 Классы в динамических моделях

В полученных динамических моделях манипуляционных систем (1.94 и 1.95) можно выделить две группы объектов. К первой группе можно отнести матричные коэффициенты M_s , C_s , M , S , K , а ко второй векторы обобщённых координат, их скоростей и ускорений, а также вектор обобщённых сил, составляющий правую часть динамической модели (1.95).

Классы, определяющие структуру и свойства этих объектов, могут основываться на общем для них базовом классе *Matrix*. Введём обозначения создаваемых классов:

Dynamic_matrix_Ms – класс, моделирующий матрицы-строки ($1 \times n$) [M_s];

Dynamic_matrix-Cs – класс объектов, моделирующих матрицы ($n \times n$) [C_s];

Dynamic_matrix-M – класс объектов, моделирующих матрицы ($n \times n$) [M];

Dynamic_matrix-S – класс объектов, моделирующих матрицы ($n \times n$) [S];

Dynamic_matrix-K – класс объектов, моделирующих матрицы ($n \times C_n^2$) [K];

Generalized_coordinates – класс векторов обобщённых координат $\{q\}$;

Generalized_speeds – класс, моделирующий векторы ($n \times 1$) обобщённых скоростей $\{\dot{q}\}$;

Generalized_speeds_sqr – класс, моделирующий векторы ($n \times 1$) квадратов обобщённых скоростей $\{\dot{q}^2\}$;

Generalized_speeds_Cn2 – класс, моделирующий векторы ($C_n^2 \times 1$) обобщённых скоростей $\{\dot{q}\}$;

Generalized_accelerations – класс, моделирующий векторы ($n \times 1$) обобщённых ускорений $\{\ddot{q}\}$;

Generalized_forces – класс, моделирующий векторы ($n \times 1$) обобщённых сил $\{Q\}$.

Схема образования классов динамических моделей представлена на рис. 3.57. На схеме стрелки направлены от базового класса к производным классам и указывают направления действий при создании новых классов, а не направления наследования свойств.

Образованные классы позволяют создавать объекты необходимые для моделирования динамики манипуляционных систем роботов, на основе динамических моделей, полученных методом Лагранжа – Эйлера с использованием матриц преобразования однородных координат. Построение динамических моделей может быть выполнено путём их визуального конструирования.

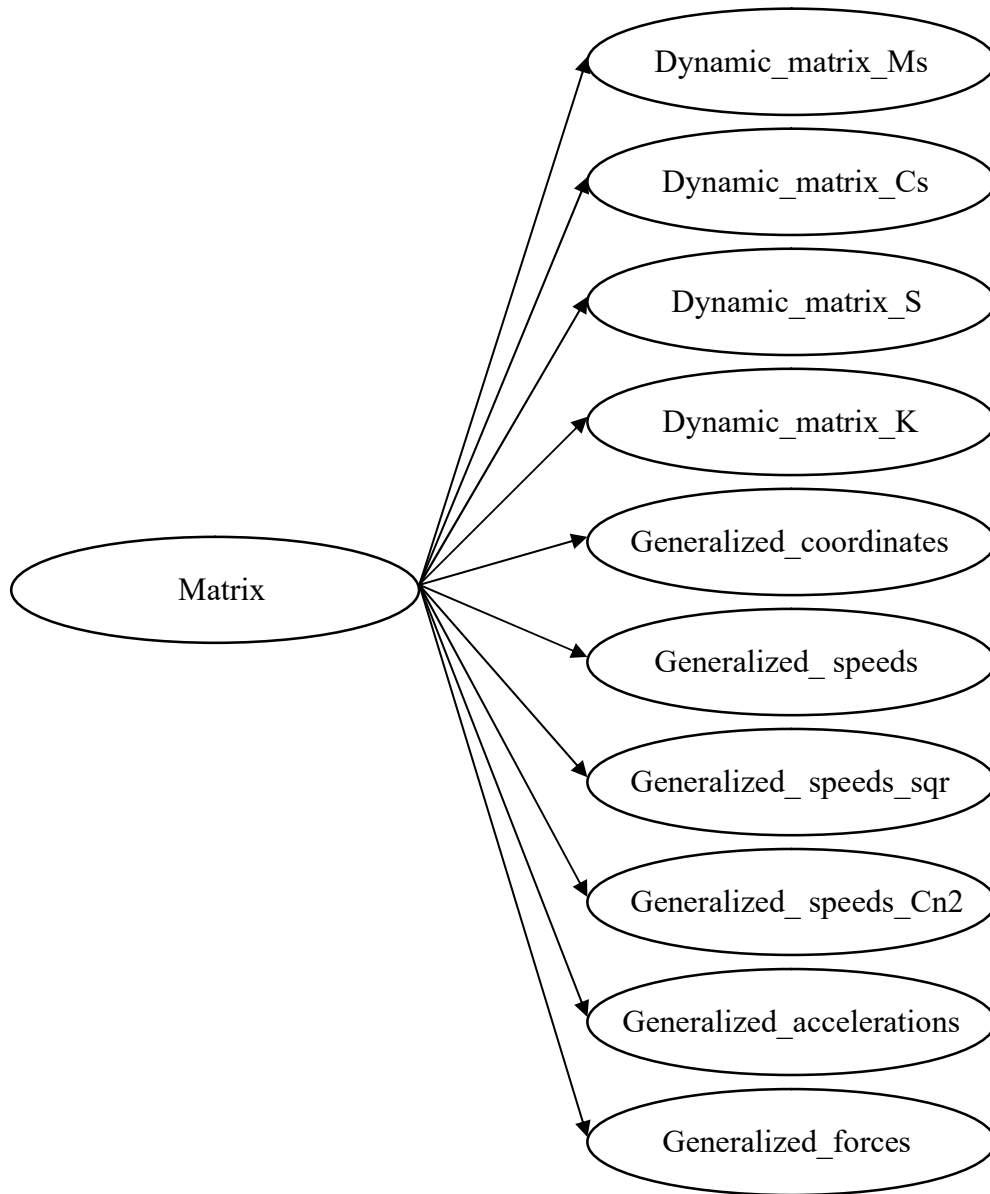


Рис. 3.57 Схема образования классов динамических моделей

3.3.3.2 Объектное представление динамических моделей

Схема объектного представления динамической модели (1.94), имеет вид (рис. 3.58).

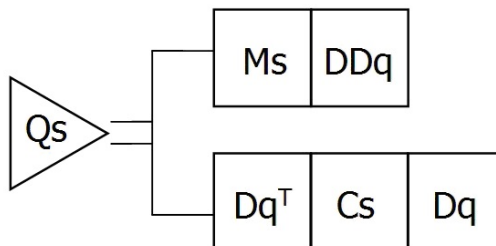


Рис. 3.58 Схема объектного представления динамической модели (1.94)

На представленной схеме, Qs – скаляр, Ms – объект класса `Dynamic_matrix_Ms`, Cs – объект класса `Dynamic_matrix_Cs`, DDq – объект класса `Generalized_accelerations`, Dq и Dq^T – объекты класса `Generalized_speeds`.

Схема, соответствующая объектному представлению динамической модели (1.95), имеет вид (рис. 3.59).

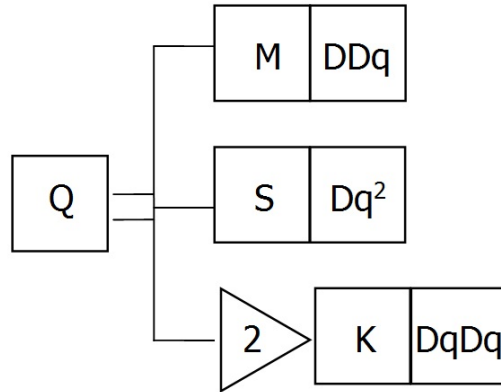


Рис. 3.59 Схема объектного представления динамической модели (1.95)

На схеме, Q – объект класса `Generalized_forces`, M – объект класса `Dynamic_matrix_M`, S – объект класса `Dynamic_matrix_S`, K – объект класса `Dynamic_matrix_K`, DDq – объект класса `Generalized_accelerations`, Dq^2 – объект класса `Generalized_speeds_sq`, $DqDq$ – объект класса `Generalized_speeds_Cn2`.

3.3.3.3 Объектное представление элементов матричных коэффициентов

При создании объектов, соответствующих классам, моделирующим матричные коэффициенты Ms , Cs , M , S и K , возможно использование метода визуального конструирования математических моделей для составления вычислительных алгоритмов на основе выражений (1.96–1.100) для определения значений элементов матриц, соответствующих этим коэффициентам.

Например, элемент m_j^{sk} матрицы $[m_j^{sk}]$ для случая $j=1$, $s=2$, $k=3$ может быть вычислен на основе выражения

$$m_1^{23} = tr \left(\frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} H_3 \frac{\partial A_{0,3}^T}{\partial q_1} \right). \quad (3.30)$$

Схема, соответствующая объектному представлению матричного выражения (3.30), имеет вид (рис. 3.60).

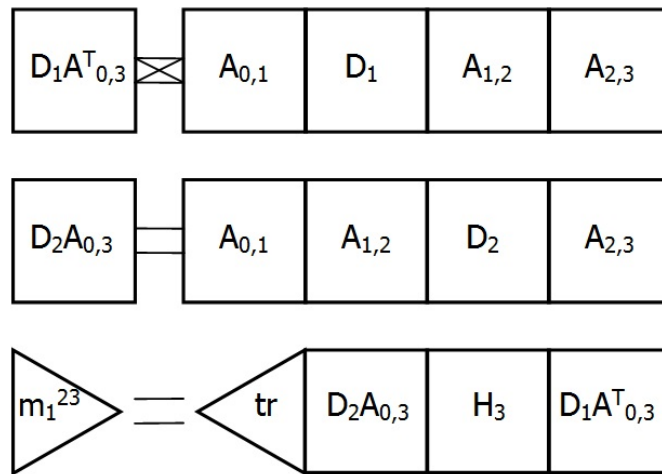


Рис. 3.60 Схема объектного представления элемента m_1^{23} (3.30)

Элемент c_{ij}^{sk} матрицы $[c_{ij}^{sk}]$ для случая $i=1, j=2, s=2, k=3$ может быть вычислен на основе выражения

$$c_{12}^{23} = tr \left(\frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} H_3 \frac{\partial^2 A^T_{0,3}}{\partial q_1 \partial q_2} \right). \quad (3.31)$$

Схема, соответствующая объектному представлению матричного выражения (3.31), имеет вид (рис. 3.61).

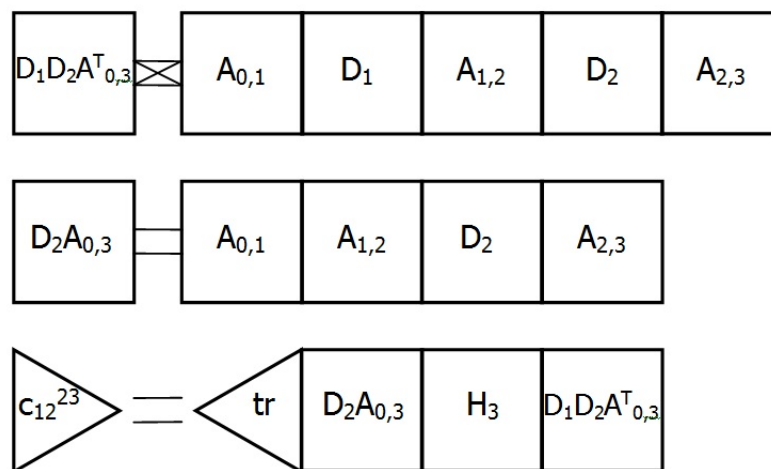


Рис. 3.61 Схема объектного представления элемента c_{12}^{23} (3.31)

Элемент s_{ij}^k матрицы $[s_{ij}^k]$ для случая $i=1, j=2, k=3$ может быть вычислен на основе выражения

$$s_{12}^3 = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,3}^T}{\partial q_2^2} \right). \quad (3.32)$$

Схема, соответствующая объектному представлению матричного выражения (3.32), имеет вид (рис. 3.62).

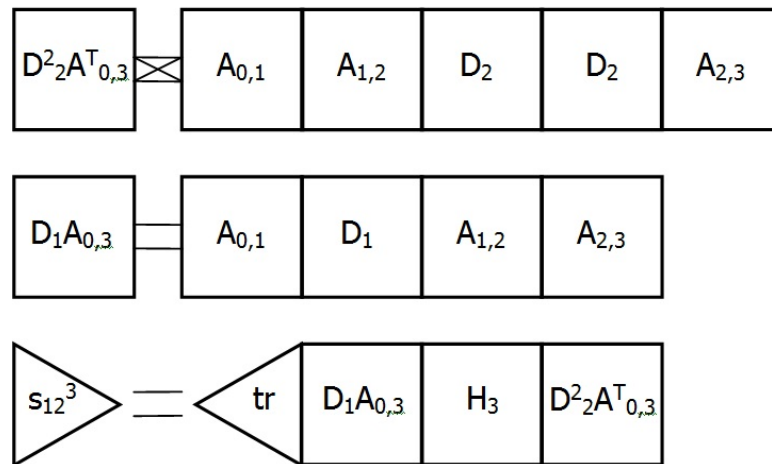


Рис. 3.62 Схема объектного представления элемента s_{12}^3 (3.32)

Необходимо учитывать, что рассмотренные примеры позволяют вычислить элементы матриц слагаемых, в сумме составляющих соответствующие матричные коэффициенты (см. 1.94 и 1.95). Так, матрицы $[s_{ij}^k]$ в сумме составляют матричный коэффициент $[S]$ в соответствии с выражением

$$[S] = \sum_{k=1}^n [s_{ij}^k]. \quad (3.33)$$

Учитывая это, элемент s_{ij} матрицы $[S]$ для случая $i=1, j=2, n=3$ может быть вычислен на основе выражения

$$s_{12} = s_{12}^1 + s_{12}^2 + s_{12}^3. \quad (3.34)$$

Объектная схема, соответствующая объектному представлению суммы трёх скалярных величин (3.34), имеет вид (рис. 3.63).

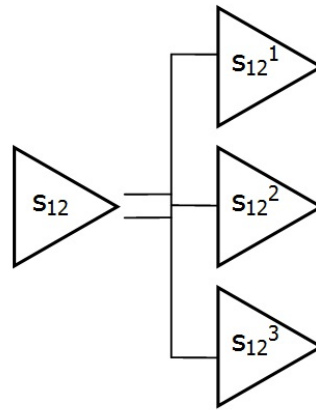


Рис. 3.63 Схема объектного представления суммы (3.34)

По таким же или им подобным объектным схемам вычисляются элементы всех матричных коэффициентов, составляющих динамические модели (1.94 и 1.95). Аналогично составляются объектные схемы для вычисления элементов матричных коэффициентов (2.35 и 2.36), входящих в динамические модели (2.31–2.34), (2.67–2.69) и (2.70). Как было показано (п. 2.3), матричные коэффициенты динамических моделей (1.94 и 1.95) являются матричными коэффициентами уравнений, составляющих динамические модели (2.100 и 2.101).

Таким образом, динамические модели манипуляционных систем могут собираться из объектов созданных классов как из кирпичиков. Процесс сборки аналогичен сборке изделий из элементов конструктора «Техно-Лего», сложные детали которого состоят из комбинации базовых деталей. Процесс такой сборки может быть реализован в среде визуального конструирования математических моделей, в которой программно реализован «механизм» взаимодействия соединяемых друг с другом элементов конструктора, являющихся объектами соответствующих классов.

3.4 Выводы

Предложена методология моделирования манипуляционных систем роботов, позволяющая моделировать основные задачи кинематики и динамики их движения, на основе математических моделей, реализующих представленные в работе методы. Решаемые при моделировании задачи разделены на две основные группы. Одна группа включает задачи, связанные с моделированием кинематики манипуляционных систем, другая – задачи, решаемые на основе моделирования динамики.

В соответствии с разработанной концептуальной схемой моделирование кинематики строится на основе геометрической модели манипуляционной системы, представляющей собой математическую модель, содержащую её геометрические параметры и информацию о видах шарниров, соединяющих звенья манипуляционной системы, и их расположении в структуре механизма. При моделировании динамики геометрическую модель предложено дополнить инерционной моделью манипуляционной системы, описывающей распределение масс внутри её звеньев, и моделью внешней нагрузки.

Определяющей особенностью разработанной методологии моделирования движения манипуляционных систем является её направленность на использование объектно-ориентированного подхода, который реализуется путём выделения в структуре данных и алгоритмов, используемых при моделировании, базовых классов, на основе которых создаются другие более сложные классы. Из соответствующих этим классам объектов формируются математические модели. Введенные понятия «класс» и «объект» полностью соответствуют одноимённым понятиям, используемым в объектно-ориентированном программировании, реализованном во многих языках программирования высокого уровня.

Поскольку математические модели манипуляционных систем роботов, представляют собой матричные уравнения то в качестве базового класса для всех объектов, соответствующих структурным частям таких моделей, предложено использовать класс матриц (Matrix). На основе этого класса, наследуя его структуру,

были созданы класс матриц преобразования однородных координат (*Homogeneous_matrix*). Затем на основе этого класса, в соответствии с разработанной методикой был создан класс *Geometric_model*, содержащий специальные матрицы, составляющие геометрические модели манипуляционных систем.

По аналогии с классом *Geometric_model*, используя класс *Matrix*, был создан класс *Inertial_matrix*, содержащий структуру матриц инерции и методы, выполняющие их инициализацию и операции с ними, и на основе уже этого класса создан класс *Inertial_model*.

При объектном представлении математической модели, учитывающей влияние внешних сил, действующих на звенья манипуляционных систем, были использованы объекты классов, определённых ранее и объекты, соответствующие классам, которые были созданы для учёта влияния внешних сил.

В динамических моделях манипуляционных систем были выделены две группы объектов. К первой группе были отнесены матричные коэффициенты уравнений движения составляющих модель, а ко второй векторы обобщённых координат, их скоростей и ускорений, а также вектор обобщённых сил, составляющий правую часть уравнений движения. Классы, определяющие структуру и свойства этих объектов, могут основываться на общем для них базовом классе *Matrix*.

На основе описанных классов составлены объектные схемы математических моделей, позволяющие моделировать основные задачи кинематики и динамики манипуляционных систем роботов. В том числе моделировать различного рода отклонения движения манипуляционных систем.

Фундаментальный результат состоит в том, что математическая модель может быть представлена в виде сложной объектной схемы (комплекса), а выделяемые в структуре этой объектной схемы части могут рассматриваться как отдельные компоненты. Компоненты состоят из объектов, имеющих в свою очередь структуру классов, которые могут быть реализованы средствами объектно-ориентированных языков программирования.

Таким образом, объектные схемы математических моделей могут собираться из объектов различных классов как из набора деталей в конструкторе «Техно-Лего». Для реализации процесса сборки объектных схем разработан формализм, который определяет «механизм» взаимодействия соединяемых друг с другом объектов соответствующих классов, рассматриваемых как элементы конструктора математических моделей.

Основное правило, определяющее работу «механизма» сборки объектных схем математических моделей, может быть сформулировано так: объекты одного класса или разных классов, наследующих свойства другого общего (базового) для них класса, могут соединяться друг с другом. Необходимым условием является соблюдение непрерывности вычислений, генерируемых объектными схемами. В большинстве случаев для этого достаточно в процессе сборки объектных схем соблюдение формальных математических правил, а в процессе выполнения вычислений по ним контроля деления на ноль.

Обобщая изложенное о структуре объектных схем математических моделей можно сказать, что объектные схемы представляют собой описание соответствующих математических моделей, выполненное по правилам некоторого языка объектно-ориентированного моделирования (именно моделирования, а не программирования).

Рассмотренная методология может быть использована как концептуальная основа для создания способа создания имитационных моделей манипуляционных систем роботов, рассматриваемых как обособленные объекты или агенты в мультиагентных системах моделирования.

4 Аспекты практического применения объектно-ориентированного моделирования манипуляционных систем роботов

4.1 Конструирование объектных схем математических моделей

4.1.1 Математическое моделирование

4.1.1.1 Процесс математического моделирования

Процесс моделирования вообще, не только математического, можно рассматривать как некоторую функцию, выполняющую отображение исследуемого объекта (системы) из реального мира в мир виртуальный. Функция обратная такой функции позволяет перенести результаты моделирования из виртуального мира в реальный. Математическое описание этой функции, собственно, и представляет собой математическую модель исследуемого объекта (системы).

На основе представленной аналогии процесс математического моделирования можно разделить на два подпроцесса. Первый процесс связан с получением математической модели, а второй с её использованием для исследования объекта оригинала. И первый, и второй процессы представляют собой моделирование. Для их различия в иностранной литературе используют соответствующие термины. Процессу получения математической модели соответствует термин «modeling», а процессу исследования объекта на основе его математической модели – термин «simulation».

Ранее уже затрагивались вопросы, связанные с оценкой адекватности создаваемых моделей манипуляционных систем (см. п. 2.4). Как было отмечено, требование адекватности, предъявляемое к математическим моделям, сводится к обеспечению ими заданной точности моделирования соответствующих параметров (характеристик) исследуемых систем.

Для обеспечения требуемой точности математических моделей необходимо учесть факторы, существенно влияющие на точность вычисляемых параметров.

Данные факторы должны быть соответствующим образом учтены в разрабатываемых математических моделях.

Разработка математической модели представляет собой многократно повторяющийся процесс математического моделирования, включающий в себя три последовательных этапа (рис. 4.1):

I – разработка концептуальной модели объекта исследования и составление её математического описания – математической модели;

II – разработка вычислительного алгоритма и программирование;

III – проведение численного эксперимента и сравнение его результатов с натурными исследованиями.

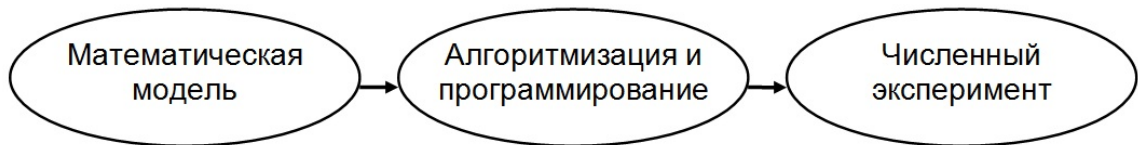


Рис. 4.1. Процесс математического моделирования

По результатам третьего этапа на основе анализа полученных данных численного и натурального экспериментов делается вывод об адекватности модели. При получении неудовлетворительного результата выполняется корректирование математического описания или концептуальной модели, и процесс моделирования повторяется (рис. 4.2).

Корректирование математического описания в случае моделирования механических систем сводится к модификации их математических моделей, представляющих собой системы алгебраических и дифференциальных уравнений, для решения которых используются необходимые численные методы и реализующие их программные пакеты.

Большинство методов модификации математических моделей обеспечивают эволюционный подход к корректированию математического описания концептуальной модели объекта исследования. Революционный подход предполагает существенную коррекцию самой концептуальной модели. Между этими подходами

находятся методы, позволяющие изменять структуру математических моделей, иногда даже радикально, но оставаясь при этом в рамках концептуальной модели.



Рис. 4.2. Повторяемость процесса математического моделирования

Таким образом, итеративность процесса математического моделирования обуславливается эффективностью, используемых в этом процессе, методов коррекции математических моделей (modeling), направленных на повышении точности моделирования (simulation).

4.1.1.2 Вычислительные алгоритмы и ошибки вычислений

При проведении натурального эксперимента получаемые результаты обрабатываются статистическими методами. В результате для измеряемых параметров исследуемой системы получают значения их математического ожидания и дисперсии. При проведении численного эксперимента вычисляемые параметры также имеют приближённые значения, характеризующиеся абсолютной и относительной ошибками.

Абсолютная ошибка представляет собой разность между точным значением вычисляемого параметра x и его приближённым значением \tilde{x}

$$e_x = x - \tilde{x}. \quad (4.1)$$

Относительная ошибка определяется модулем отношения абсолютной ошибки к приближённому значению вычисляемого параметра

$$\sigma_x = \left| \frac{e_x}{\tilde{x}} \right|. \quad (4.2)$$

При проведении анализа результатов численного эксперимента приходится иметь дело с тремя основными видами ошибок. К первому виду нужно отнести ошибки, являющиеся следствием неточности исходной информации о значениях задаваемых параметров. Ко второму виду относят ошибки, связанные с самим вычислительным процессом, это так называемые ошибки ограничения – ошибки, зависящие от численных методов. К третьему виду относят ошибки округления вычисляемых величин. Каждая из рассмотренных видов ошибок может быть представлена в абсолютной и относительной форме.

Приведем выражения для определения абсолютной и относительной ошибок, возникающих при выполнении арифметических операций.

Сложение: $x + y = \tilde{x} + e_x + \tilde{y} + e_y = (\tilde{x} + \tilde{y}) + (e_x + e_y),$

$$e_{x+y} = e_x + e_y, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{x+y} = \left| \frac{e_{x+y}}{\tilde{x} + \tilde{y}} \right| = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} + \tilde{y}} \sigma_x + \frac{\tilde{y}}{\tilde{x} + \tilde{y}} \sigma_y. \quad (4.4)$$

Вычитание: $x - y = \tilde{x} + e_x - \tilde{y} - e_y = (\tilde{x} - \tilde{y}) + (e_x - e_y),$

$$e_{x-y} = e_x - e_y, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{x-y} = \left| \frac{e_{x-y}}{\tilde{x} - \tilde{y}} \right| = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} - \tilde{y}} \sigma_x - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x} - \tilde{y}} \sigma_y. \quad (4.6)$$

Умножение: $x \cdot y = (\tilde{x} + e_x)(\tilde{y} + e_y) = \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}e_y + \tilde{y}e_x + e_x e_y,$

$$e_{x \cdot y} \approx \tilde{x}e_y + \tilde{y}e_x, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{x \cdot y} = \left| \frac{e_{x \cdot y}}{\tilde{x} \cdot \tilde{y}} \right| \approx \sigma_x + \sigma_y. \quad (4.8)$$

Деление: $\frac{x}{y} = \frac{\tilde{x} + e_x}{\tilde{y} + e_y} \approx \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} + \frac{1}{\tilde{y}}e_x - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}^2}e_y,$

$$e_{\frac{x}{y}} \approx \frac{1}{\tilde{y}}e_x - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}^2}e_y, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{\frac{x}{y}} = \left| \frac{e_{\frac{x}{y}}}{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}} \right| \approx \sigma_x - \sigma_y. \quad (4.10)$$

В численном анализе формулы (4.3–4.10) позволяют контролировать распространение ошибок, возникающих в процессе вычислений. Для организации такого контроля необходимо построить граф вычислительного процесса.

Граф вычислительного процесса состоит из узлов и ребер, изображаемых стрелками. В узлах помещаются отдельно арифметические операции и операнды. Ребра соединяют между собою узлы в соответствии с приоритетом выполнения арифметических операций в вычисляемом выражении. Стрелка ребра указывает на следующую операцию, в которой будет участвовать операнд. Рядом с ребром-стрелкой указывается коэффициент, позволяющий вычислить ошибку, возникающую при выполнении соответствующей операции. В качестве операнда могут быть как заданные константы и переменные, так и промежуточные результаты вычислений. Граф следует читать снизу в верх, следуя стрелкам.

Составление графа может быть проиллюстрировано на примере арифметического выражения (рис. 4.3)

$$u = \frac{x + y}{z} \quad (4.11)$$

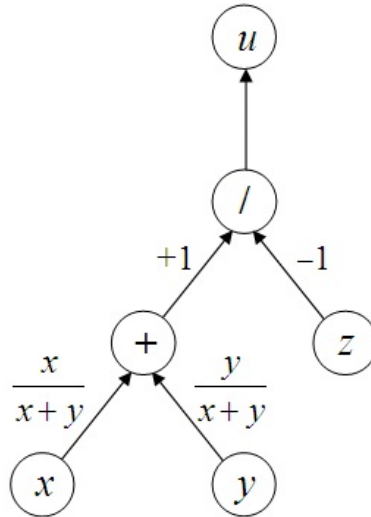


Рис. 4.3. Граф вычислительного процесса

Относительная ошибка вычисляемой операции (см. 4.3–4.10) входит в результат следующей операции, умножаясь на коэффициент у стрелки, соединяющей эти две операции. Таким образом, для анализа влияния основных ошибок на точность вычисления необходимо разработать граф вычислительного процесса, соответствующего исследуемой математической модели.

4.1.1.3 Адекватность и оценка точности математического моделирования

Определение адекватности и оценка точности модели любого типа, будь то математическая модель или имитационная, является важнейшей задачей моделирования, так как любые исследования на неадекватной модели не имеют смысла.

Как уже отмечалось (см. п.п. 4.1.1.1), построение математической модели представляет собой итеративный процесс. Поэтому оценку адекватности и точности математической модели приходится выполнять многократно. Правильность

построения математической модели может быть проверена только на практике за счет повторения цикла «разработка модели – проверка модели» (см. рис. 4.2).

Понятие адекватности модели не имеет количественного измерения: модель либо адекватна объекту оригиналу, либо не адекватна. По отношению к математическим моделям возможно использование количественных оценок точности их реализации на основе вычислительного эксперимента (см. п.п. 4.1.1.2). При этом предполагается, что программа, реализующая вычисления по математической модели, не содержит ошибок, исходные данные также не содержат ошибок и были введены верно, а вычислительная машина в процессе вычислений не имела сбоев в работе.

Математическую модель можно считать достоверной, если она адекватно описывает исследуемый объект, а точность её реализации на ЭВМ соответствует заданной, т.е. ошибки вычислений не превышают допустимых. Необходимым условием адекватности модели является предсказуемость на её основе поведения исследуемого объекта при допустимых внешних воздействиях.

При проведении натурального эксперимента получаемые результаты обрабатываются статистическими методами. В итоге для измеряемых параметров исследуемого объекта (системы) получают значения их математического ожидания и дисперсии. При проведении численного эксперимента вычисляемые параметры также имеют приближённые значения, характеризующиеся абсолютной и относительной ошибками.

В качестве количественных критериев адекватности математической модели могут рассматриваться ошибки вычисляемого по ней результата, сопоставляемые с математическими характеристиками соответствующей случайной величины. Ошибки результата вычислений могут быть определены на основе анализа графа вычислительного процесса с использованием формул распространения ошибок (4.3–4.10), позволяющих вычислять абсолютную и относительную ошибку результата после выполнения соответствующих арифметических операций.

К основным ошибкам, влияющим на адекватность математической модели, можно отнести:

- неправильный выбор гипотез, положенных в основу концептуальной модели и определяющих состав элементов объекта и связей между ними и соответственно определяющих структуру математической модели;
- не учет ряда условий функционирования объекта, накладывающих на модель дополнительные ограничения;
- введение в концептуальную модель несущественных факторов или отсутствие в ней ряда существенных факторов.

Эти и другие ошибки могут приводить к тому, что созданные в соответствии с условиями, рассмотренными в п. 3.1.1, математические модели не будут отвечать требованию адекватности.

Эволюционный подход позволяет повысить точность математической модели путём увеличения числа факторов, влияющих на точность, вычисляемых на ее основе параметров. Именно такой подход использован при модификации геометрических моделей манипуляционных систем роботов путём дополнения параметров этих моделей геометрическими отклонениями размеров звеньев и, так называемыми, отклонениями позиционирования (см. п. 2.1).

Дальнейшая работа по повышению точности математических моделей, описывающих движение манипуляционных систем роботов, основанная на эволюционном подходе, позволила учесть в их динамических моделях влияние имеющихся в шарнирах зазоров и упругой податливости (см. п. 2.2). Рассмотрение влияния упругой податливости в передаточных механизмах позволило дополнительно учитывать малые упругие колебания около квазистатических отклонений позиционирования соответствующих шарнирных координат (см. п. 2.3).

Необходимо отметить, что выполненное расширение множества факторов, учитываемых в математических моделях манипуляционных систем роботов, существенно усложнило эти модели и, по всей видимости, дальнейшее его расширение уже не даст существенных преимуществ в точности моделирования.

4.1.2 Объектное представление математических моделей

4.1.2.1 Структура объектных схем

Разработанная методология объектно-ориентированного моделирования манипуляционных систем роботов существенно повысила эффективность выполнения работ, связанных с составлением и последующей модификацией математических моделей. Данная методология предлагает не ограничиваться составлением математических моделей в форме систем уравнений, а создавать эквивалентные этим математическим моделям объектные схемы (рис. 4.4). Для этого в уравнениях математических моделей выделяют части, которым ставят в соответствие объекты определённых классов. Понятие класса математических объектов в данном случае соответствует понятию «рода структуры» в бурбаковском формализме.

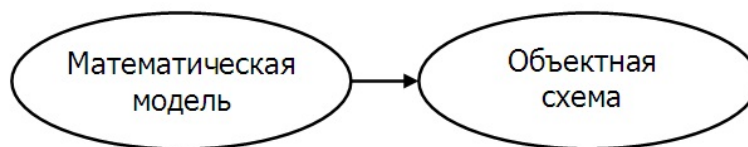


Рис. 4.4. Объектно-ориентированное математическое моделирование

Объекты одного класса, основываясь на общей для них математической формуле (выражении), отличаются друг от друга только значениями (величинами) данных, используемых при их создании (инициализации). В теории моделирования систем эти данные называют характеристиками, они содержат значения переменных и постоянных коэффициентов, входящих в связывающее их математическое выражение.

В соответствии с реализуемым объектно-ориентированным подходом, исходная математическая модель может быть представлена в виде сложной объектной схемы (комплекса), а выделяемые в структуре этой объектной схемы части могут рассматриваться как отдельные компоненты. Компоненты состоят из объектов, имеющих в свою очередь структуру классов, которые могут быть реализованы средствами объектно-ориентированных языков программирования. Это

позволяет различные математические модели составлять из отдельных, независимых друг от друга, частей-объектов. Эти части в свою очередь также могут состоять из других более простых частей-объектов.

В соответствии с разработанной методологией (см. рис. 3.1) на основе декомпозиции математических моделей манипуляционных систем роботов было установлено, что в структуре составных частей этих математических моделей находятся объекты, соответствующие двум основным классам. Это объекты класса геометрических моделей *Geometric_model* (см. п. 3.2.1) и класса инерционных моделей *Inertial_model* (см. п. 3.3.1). Причём, при построении кинематических моделей (см. рис. 3.2) используются только объекты класса *Geometric_model* (см. рис. 3.41 и 3.42), а при построении динамических моделей (см. рис. 3.3) эти объекты входят в сочетании с объектами *Inertial_model* (см. рис. 3.60–3.62).

Таким образом, объектные схемы математических моделей могут собираться из объектов различных классов как из деталей конструктора «Техно-Лего», части которого состоят из комбинации определённого набора деталей. Для реализации процесса сборки деталей разработан формализм, подробно описанный в п. 3.2 и 3.3. Данный формализм определяет «механизм» взаимодействия соединяемых друг с другом объектов соответствующих классов, рассматриваемых как элементы конструктора математических моделей.

Основное правило, определяющее работу «механизма» сборки объектных схем математических моделей, может быть сформулировано так: объекты одного класса или разных классов, наследующих свойства другого общего (базового) для них класса, могут соединяться друг с другом. Необходимым условием является соблюдение непрерывности вычислений, генерируемых объектными схемами. В большинстве случаев для этого достаточно в процессе сборки объектных схем соблюдение формальных математических правил, а в процессе выполнения вычислений по ним контроля деления на ноль.

Обобщая изложенное о структуре объектных схем математических моделей можно сказать, что объектные схемы представляют собой описание соответствующих математических моделей, выполненное по правилам некоторого языка объ-

ектно-ориентированного моделирования (именно моделирования, а не программирования).

4.1.2.2 Визуальное конструирование объектных схем

Составление объектных схем удобно выполнять в среде специально разработанной компьютерной программы, автоматизирующей этот процесс на основе принципа визуального конструирования, формализованного в виде метода, позволяющего создавать объектные схемы математических моделей из объектов заранее описанных классов, а также структурных блоков, представляющих собой объектные схемы, состоящие из нескольких объектов. Такие объекты и структурные блоки могут храниться в специально организованном банке (базе данных).

Данный подход позволяет объединить первые два этапа разработки математических моделей. При этом для исследователя исключается стадия алгоритмизации и программирования, остаётся только проведение численного эксперимента и анализ его результатов (рис 4.5).

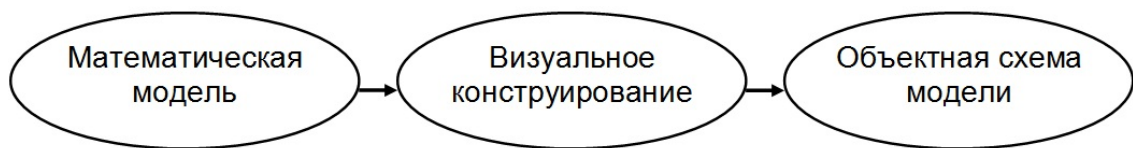


Рис. 4.5. Визуальное конструирование объектных схем

По существу, разработанный метод визуального конструирования объектных схем математических моделей является разновидностью методов визуального программирования, отличающийся от других в первую очередь своей прикладной направленностью и меньшим формально-математическим контролем конструируемой объектной схемы математической модели.

Прикладная направленность рассматриваемого метода визуального конструирования объектных схем математических моделей определяется методологией объектно-ориентированного моделирования манипуляционных систем роботов, в рамках которой собственно и разрабатывался данный метод. Однако никаких специальных ограничений данная методология на этот метод не накладывает. Методологические особенности проявляются лишь в структуре самих математи-

ческих моделей, для которых с помощью рассматриваемого метода конструируются объектные схемы, а, следовательно, разрабатываются (типизируются) необходимые классы и соответствующие им виды объектов.

Обеспечение формально-математического контроля при конструировании объектных схем математических моделей является для данного метода дополнительной функциональной задачей, которая накладывает ограничения на возможности, предоставляемые основным правилом, определяющим работу «механизма» сборки объектных схем (см. п.п. 4.1.2.1).

Например, матричное выражение $W=MV$, где M – матрица $(n \times n)$, а V и W – векторы $(n \times 1)$, представленное в виде объектной схемы может быть выполнено даже если в правой части выражения переставить местами матрицу M и вектор V . Это не противоречит основному правилу конструирования объектных схем, так как данная матрица и вектор моделируются объектами одного класса или родственных классов. Конечный результат вычислений будет зависеть от логики, реализуемой методами-конструкторами объектов соответствующего класса. В итоге вектор W будет сформирован и в этом случае.

В рассмотренном примере было проигнорировано правило не коммутативности бинарной операции произведения матриц. Это стало возможным в силу того, что объекты одного класса или разных классов, наследующих свойства другого общего (базового) для них класса, могут соединяться друг с другом.

Данную возможность не следует считать недостатком метода визуального конструирования, так как контроль формально-математического соответствия исходной математической модели и создаваемой на её основе объектной схемы может быть включен как опция в программную реализацию среды конструирования. Преимуществом же является расширение возможностей для модификации математических моделей путём замены некоторых частей этих моделей другими им аналогичными, но не обязательно, строго говоря, эквивалентными.

Визуальное конструирование объектных схем математических моделей предоставляет широкие возможности, как при составлении вычислительного алгоритма, так и при его модификации.

4.1.2.3 Шаблоны объектных схем

Для создания объектных схем в компьютерной среде, поддерживающей процесс их конструирования могут быть использованы шаблоны. Шаблоны представляют собой заготовки схемных решений наиболее часто используемых при создании объектных схем. В отличие от объектных схем при создании их шаблонов не формируются вычислительные алгоритмы. Шаблоны представляют собой каркасную основу для некоторых частей объектных схем, которую можно использовать для создания необходимой части-объекта при визуальном конструировании объектной схемы.

При создании шаблонов могут быть использованы индексы для обозначения отдельных объектов. Это сроднит структуру шаблонов с формулами, описывающими матричные алгоритмы. Например, шаблоны матричных уравнений (1.4–1.5) будут иметь вид (рис. 4.6–4.7).

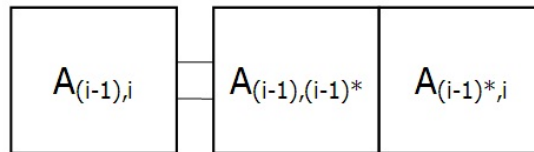


Рис. 4.6. Шаблон матричного уравнения (1.4)

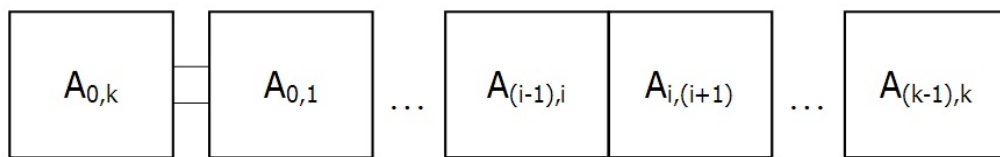


Рис. 4.7. Шаблон матричного уравнения (1.5)

Шаблоны объектных схем имеют практическое значение, они позволяют ускорить процесс составления объектных схем сложных математических моделей. Подставляя вместо индексов, используемых в обозначении объектов в шаблоне, их фактические значения и копируя повторяющиеся участки объектных схем, процедура составления объектных схем при визуальном конструировании существенно упрощается и становится менее утомительной.

4.1.2.4 Модификация объектных схем

В п. 2.1 рассмотрены методы модификации геометрических моделей манипуляционных систем роботов путём дополнения параметров этих моделей геометрическими отклонениями размеров звеньев и отклонениями шарнирных координат, называемых отклонениями позиционирования. Для этого предложено использовать класс `Modif_geometric_model` наследующий и расширяющий структуру класса `Geometric_model`.

В качестве альтернативы созданию дополнительного класса, позволяющего моделировать модифицированные (уточнённые) геометрические модели манипуляционных систем роботов, можно использовать объект модификатор объектов класса `Geometric_model`, соответствующий правым матрицам в выражениях математических моделей (2.4–2.6) и (2.7–2.9). Данный подход к модификации геометрических моделей не ведёт к усложнению их структуры и более соответствует концепции объектно-ориентированного моделирования.

Примеры повышения точности моделирования манипуляционных систем роботов, рассмотренные в п.п. 4.1.1.3, основывались на эволюционном пути уточнения математических моделей, предполагающем решение данной задачи за счёт расширения круга учитываемых в модели факторов, показывают, что дальнейшее увеличение числа учитываемых факторов уже не даёт значимых результатов в точности моделирования. При этом, как было отмечено, сложность моделей существенно возросла.

Если возможности эволюционного пути уточнения математической модели исчерпали себя, возникает вопрос, каким способом модифицировать математическую модель, чтобы повысить точность моделирования. Революционный путь требует пересмотра гипотез, положенных в основу концептуальной модели. Но если для изменения концептуальной модели оснований нет, что остаётся в таком случае. Необходимы методы, позволяющие в рамках принятой концептуальной модели проводить модификацию математической модели не традиционными для эволюционного пути способами.

Например, построенная методом визуального конструирования объектная схема, составленная на основе математической модели, может быть подвержена модификации путём замены одних объектов этой схемы на аналогичные им объекты. Такое преобразование (модификация) модели не обязательно должно быть математически эквивалентным, достаточно лишь соблюдения условия непрерывности вычислений, выполняемых по получаемым при этом объектным схемам. Это условие аналогично, например, требованию соблюдения не вырожденности линейных систем при их модификации.

Получаемая путём модификации объектная схема и реализуемая на её основе имитационная модель уже не будет, строго говоря, эквивалентна первоначальной математической модели. Однако модифицированная модель может при этом оставаться адекватной, более того, интересующие исследователя параметры (внутренние характеристики) моделируемой системы могут при этом лучше согласовываться с натурным экспериментом.

Таким образом, постулируется утверждение о том, что путём внесения изменений в структуру объектной схемы можно повысить некоторые показатели моделирования. Применение данного метода, получившего название метода структурных мутаций в математических моделях, позволяет компенсировать влияние факторов, не учитываемых аналитической моделью. Появление таких неучтённых в модели факторов и степень их влияния может носить случайный характер. В результате, исходная детерминированная математическая модель трансформируется в имитационную модель (см. рис. 3.8).

Важным фактом при этом является то, что модифицированная математическая модель, трансформируясь в имитационную, остаётся при этом непрерывно детерминированной. То есть, в каждый момент времени все параметры исследуемого объекта (системы) имеют определённые значения. Значения внешних параметров должны быть заданы или определены известными способами, а значения внутренних параметров могут быть вычислены на основе модифицированной объектной схемы.

Очевидно, что не всякое изменение в структуре математической модели приводит к повышению точности моделирования с её использованием, тем более, если эти изменения производятся случайным образом. Поэтому целенаправленность таких действий имеет важное, возможно первостепенное значение.

С учётом этого предложенный метод модификации математических моделей можно ограничить методом целенаправленных структурных мутаций. По данному методу части объектной схемы подлежащие замещению другими объектами или полному удалению определяются на основе анализа структуры модифицируемой математической модели по результатам моделирования (simulation).

Дальнейшее развитие методов модификации математических моделей может основываться на методах искусственного интеллекта, реализуемых на основе обучаемых систем, например, искусственных нейронных сетей.

4.1.3 Объектное представление параллельных вычислительных алгоритмов

Разработка алгоритмов моделирования манипуляционных систем роботов, реализующих параллельные вычисления соответствующих математических моделей, представляет собой актуальную задачу. Известны примеры разработок таких алгоритмов, проводившиеся ранее [142–145]. Однако исследование данного вопроса нельзя считать завершённым.

Разработанная методология объектно-ориентированного моделирования манипуляционных систем роботов позволяет повысить эффективность выполнения работ связанных с составлением параллельных вычислительных алгоритмов. Это достигается на основе представления математических моделей в виде объектных схем, в которых каждый объект рассматривается как часть математической модели независимая от других частей-объектов, связанных с ним в общую схему.

4.1.3.1 Анализ структуры объектных схем

В п. 3.3 описано объектно-ориентированное моделирование динамики манипуляционных систем роботов, основывающееся на объектном представлении геометрической и инерционной моделей манипуляционных систем, а также внешней нагрузки (см. п.п. 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1 и 3.3.2). Объектные схемы динамических моделей (1.94) и (1.95), полученных на основе метода Лагранжа – Эйлера, были рассмотрены в п.п. 3.3.3.2 (см. рис. 3.58 и 3.59).

Объектная схема динамической модели (1.94) может быть представлена в виде (рис. 4.8)

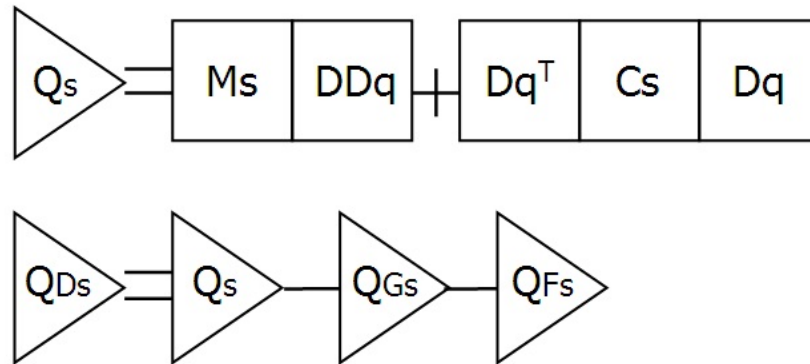


Рис. 4.8 Объектная схема динамической модели (1.94)

На представленной схеме Q_s – скалярная величина, соответствующая результирующей обобщённой силе по s -й обобщённой (шарнирной) координате; Q_{Ds} – скалярная величина, соответствующая усилию, развиваемому приводом в s -м сочленении (шарнире); Q_{Gs} – скалярная величина, соответствующая обобщённой силе по s -й обобщённой координате, от действия сил тяжести; Q_{Fs} – скалярная величина, соответствующая обобщённой силе от действия внешних сил. M_s – объект класса `Dynamic_matrix_Ms`; C_s – объект класса `Dynamic_matrix_Cs`; DDq – объект класса `Generalized_accelerations`; Dq и Dq^T – объекты класса `Generalize_speeds`.

Рассмотрим структуру объектов, составляющих объектную схему, представленную на рис. 4.8, на основе шаблонов их объектных схем (см. п.п. 4.1.2.3).

Объект **Ms** имеет структуру класса `Dynamic_matrix_Ms` (см. п.п. 3.3.3.1) и соответствует (1.97) матрице-строке $(1 \times n)$ $[M_s]$. Элементы этой матрицы могут быть вычислены на основе формулы

$$m_j^{sk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right), \quad (j, s, k = \{1, \dots, n\}). \quad (4.12)$$

Шаблон для составления объектных схем, соответствующих различным элементам матрицы $[M_s]$, в соответствии с формулой (4.12), будет иметь вид (рис. 4.9).

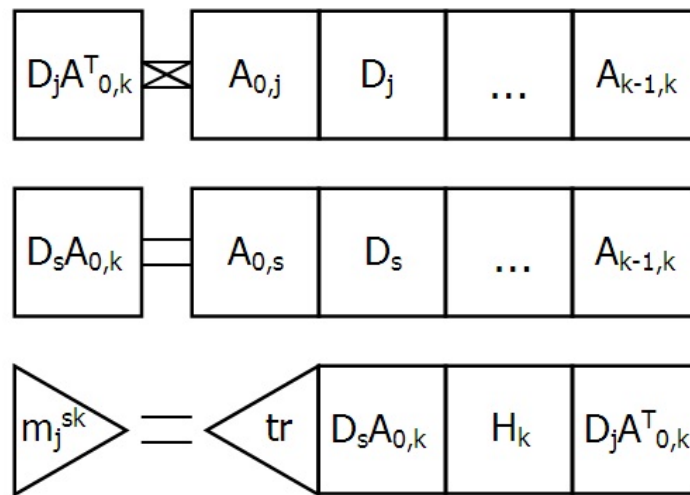


Рис. 4.9 Шаблон объектных схем для элемента m_j^{sk} (4.12)

Объект **Cs** имеет структуру класса `Dynamic_matrix_Cs` и соответствует матрице $(n \times n)$ $[C_s]$ (1.96). Элементы этой матрицы могут быть вычислены на основе формулы

$$c_{ij}^{sk} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \right), \quad (i, j, s, k = \{1, \dots, n\}). \quad (4.13)$$

Шаблон для составления объектных схем, соответствующих различным элементам матрицы $[C_s]$, в соответствии с формулой (4.13), будет иметь вид (рис. 4.10).

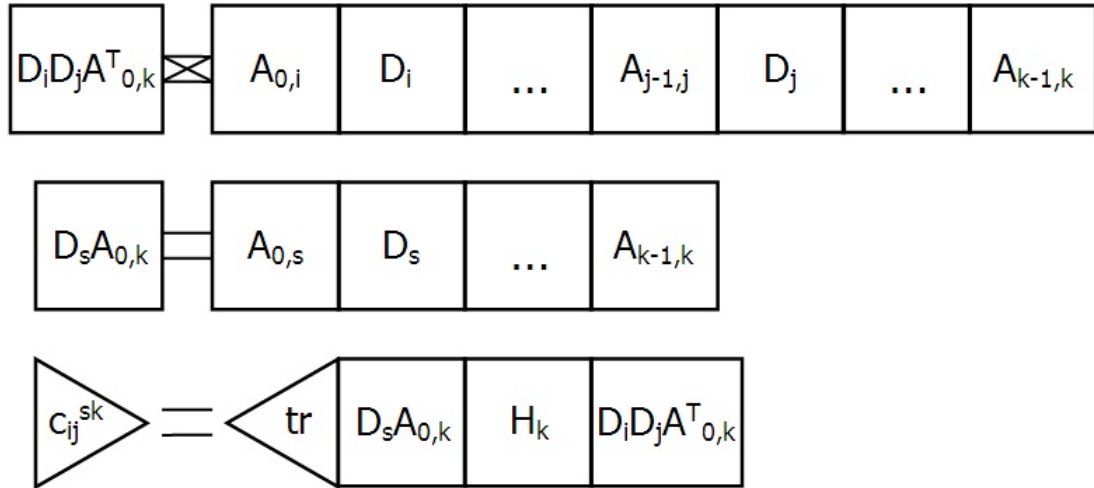


Рис. 4.10 Шаблон объектных схем для элемента s_j^{sk} (4.13)

Объект Q_{Gs} моделирующий скалярную величину, соответствующую обобщённой силе Q_{Gs} , значение которой может быть вычислено по формуле (см. п.п. 1.2.10)

$$Q_{Gs} = \sum_{k=s}^n tr \left[F_{Gk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_s} \right] = tr \left[F_{Gs} \frac{\partial A_{0,s}^T}{\partial q_s} \right] + tr \left[F_{G(s+1)} \frac{\partial A_{0,(s+1)}^T}{\partial q_s} \right] + \dots + tr \left[F_{Gn} \frac{\partial A_{0,n}^T}{\partial q_s} \right], \quad (4.14)$$

где матрица F_{Gk} отражает влияние сил тяжести звеньев. Соответствующий этой матрице объект FGk имеет структуру класса `External_force_matrix` (см. рис. 3.51).

Шаблон для составления объектных схем, позволяющих моделировать влияние сил тяжести звеньев в различных n -звенных манипуляционных системах, может быть представлен в форме (рис. 4.11).

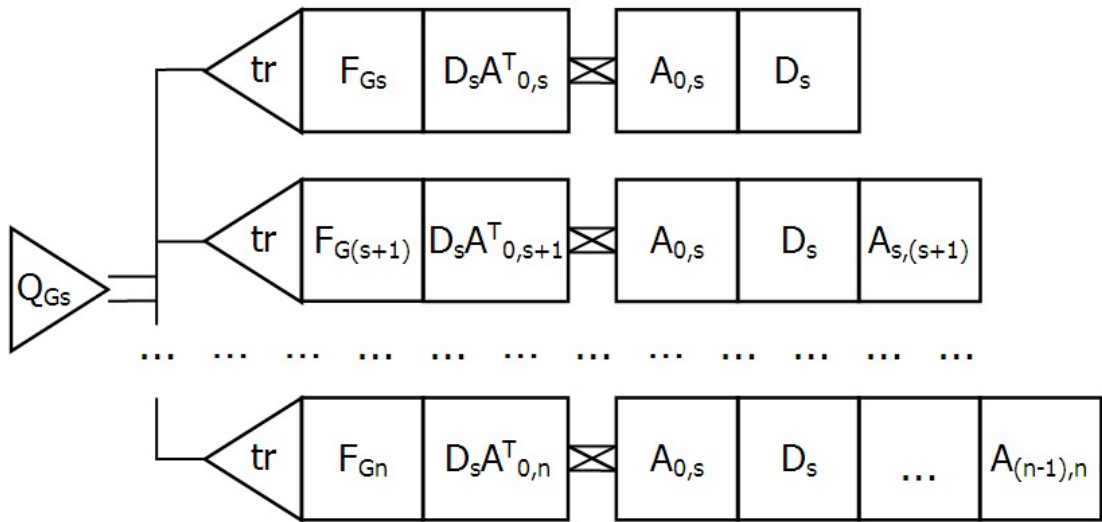


Рис. 4.11 Шаблон объектных схем для вычисления скалярной величины Q_{Gs} (4.14)

Объект Q_{Fs} моделирующий скалярную величину, соответствующую обобщённой силе Q_{Fs} , значение которой может быть вычислено по формуле (см. п.п. 1.2.9)

$$Q_{Fs} = \sum_{k=s}^n tr \left(F_{Rk} \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_s} + F_{Mk,s} A_{0,s}^T \right), \quad (4.15)$$

где матрицы F_{Rk} и F_{Mks} отражают влияние внешних сил, действующих на звенья и представленных главным вектором R и главным моментом M . Соответствующие этим матрицам объекты FRk и $FMks$ имеют структуру класса `External_force_matrix`.

Шаблон для составления объектных схем, позволяющих моделировать влияние внешних сил, действующих на звенья в различных n -звенных манипуляционных системах, может быть представлен в форме (рис. 4.12).

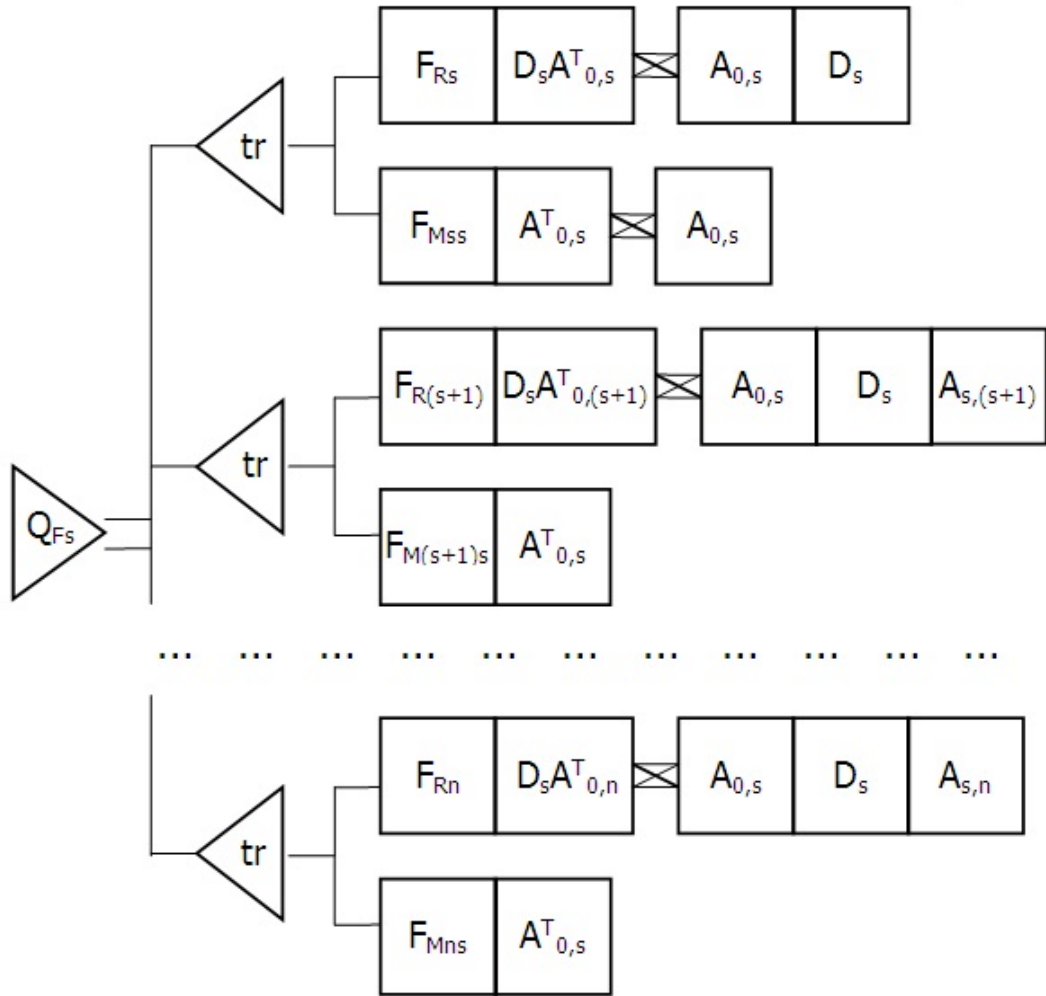


Рис. 4.12 Шаблон объектных схем для вычисления скалярной величины Q_{Fs} (4.15)

Проведенный в соответствии с разработанной методологией моделирования манипуляционных систем роботов анализ структуры объектных схем, представленных шаблонами рис. 4.9–4.12, соответствующих динамической модели (1.94) рис. 4.8, позволяет разделить составляющие их объекты на три группы.

Первую группу представляют объекты, соответствующие классу `Geometric_model`. Это объекты, имеющие в обозначении символы A и D . Данные объекты соответствуют матрицам преобразования однородных координат и их производным, поэтому их следует отнести к геометрической модели манипуляционных систем (см. п.п. 3.2.1).

Вторую группу представляют объекты, соответствующие классу `Inertial_model`. Это объекты, обозначаемые символом H . Данные объекты, соот-

ветствуют матрицам инерции звеньев и их следует отнести к инерционной модели манипуляционных систем (см. п.п. 3.3.1).

Третью группу представляют объекты, соответствующие классу `External_force_matrix`. Это объекты, обозначаемые символом F . Данные объекты, соответствуют матрицам, отражающим влияние внешних сил, поэтому их следует отнести к модели внешней нагрузки (см. п.п. 3.3.2).

4.1.3.2 Алгоритм параллельных вычислений динамической модели

Выделение в структуре объектных схем, составляющих динамическую модель (1.94) (рис. 4.8) объектов, относящихся в соответствии с методологической схемой моделирования к трём видам моделей (см. п.п. 3.1.2): геометрической модели, инерционной модели и модели внешней нагрузки, позволяет вычислять эти объекты независимо друг от друга и, кроме того, разделять данные внутри этих объектов на изменяемые и неизменяемые в процессе моделирования.

В вычислительном алгоритме, реализующем моделирование на основе объектной (вычислительной) схемы (рис. 4.8), можно выделить несколько уровней (ярусов), на которых происходит вычисление составных частей данной объектной схемы.

На нижнем уровне выполняется инициализация данных, относящихся к геометрической и инерционной моделям и модели внешней нагрузки исследуемой манипуляционной системы (см. п.п. 1.1.4, 1.2.5 и 1.2.8), и в соответствии с выражениями (1.1), (1.63), (1.77), (1.78) и (1.86) вычисляются объекты неизменяющиеся в процессе моделирования (рис. 4.13).

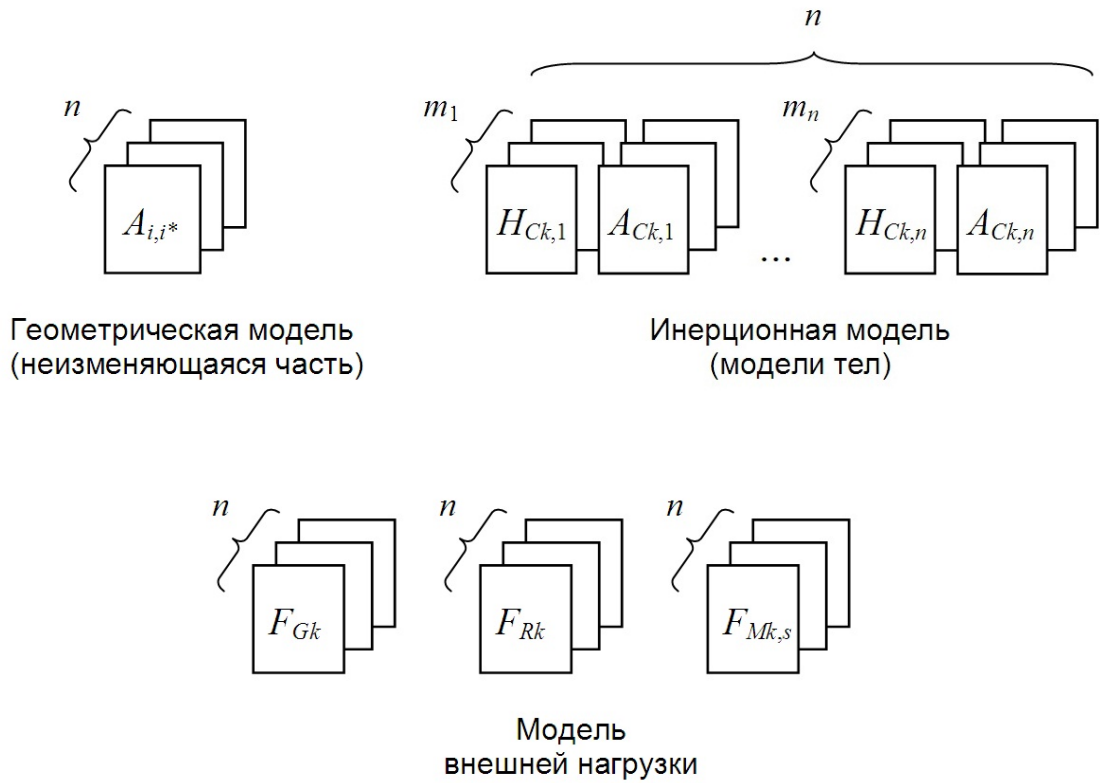


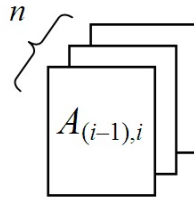
Рис. 4.13 Уровень инициализации данных алгоритма вычисления динамической модели

На первом (I) уровне на основе выражений (1.63) и (1.64) вычисляются матрицы инерции звеньев, составляющие инерционную модель (рис. 4.14).



Рис. 4.14 Уровень I алгоритма вычисления динамической модели

На втором (II) уровне (рис. 4.15) вычисляются объекты, относящиеся к геометрической модели, зависящие от изменяющихся в процессе моделирования параметров в соответствии с выражением (1.4).



Геометрическая модель
(изменяющаяся часть)

Рис. 4.15 Уровень II алгоритма вычисления
динамической модели

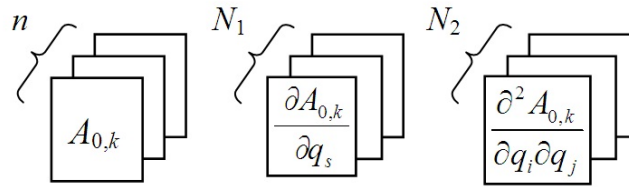
На третьем (III) уровне (рис. 4.16) вычисляются объекты, относящиеся к геометрической модели и объекты, соответствующие матрицам частных производных. Данные объекты также зависят от изменяющихся в процессе моделирования параметров в соответствии с выражениями (1.5) и (1.19). В соответствии с условиями (1.101), (1.102) и (1.103) при вычислении матриц частных производных необходимо исключить вычисление элементов этих матриц тождественно равных нулю.

В соответствии с условием (1.101) количество N_1 вычисляемых матриц частных производных $\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_s}$ ($k, s=1, \dots, n$) будет определяться выражением

$$N_1 = \frac{n}{2}(n+1), \quad (4.16)$$

а в соответствии с условиями (1.103) и (1.104) и свойством $\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j \partial q_i}$ количество N_2 матриц вторых частных производных будет определяться выражением

$$N_2 = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2}(k+1). \quad (4.17)$$



Расширенная геометрическая модель,
изменяющаяся при моделировании

Рис. 4.16 Уровень III алгоритма вычисления динамической модели

На четвёртом (IV) уровне (рис. 4.17) выполняются вычисления на основе объектных схем, соответствующих различным элементам матриц $[M_s]$, $[C_s]$ (1.94) и скалярным величинам Q_{Gs} (1.87) и Q_{Fs} (1.80) или (1.82) (рис. 4.17).

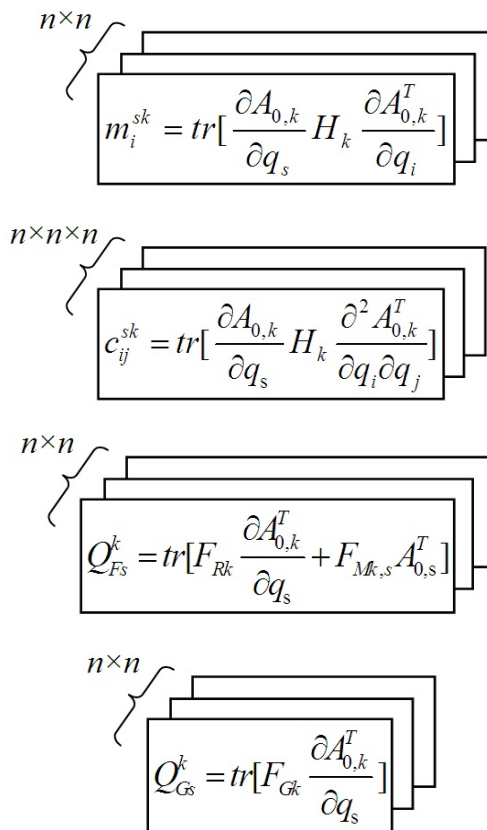


Рис. 4.17 Уровень IV алгоритма вычисления динамической модели

На пятом (V) уровне на основе объектов M_s , C_s , Q_{Gs} и Q_{Fs} соответствующих матрицам $[M_s]$ и $[C_s]$ (рис. 4.18) и обобщённым силам Q_{Gs} и Q_{Fs} (рис. 4.19) выполняется вычисление объектной схемы соответствующей динамической модели (1.94) (см. рис. 4.8).

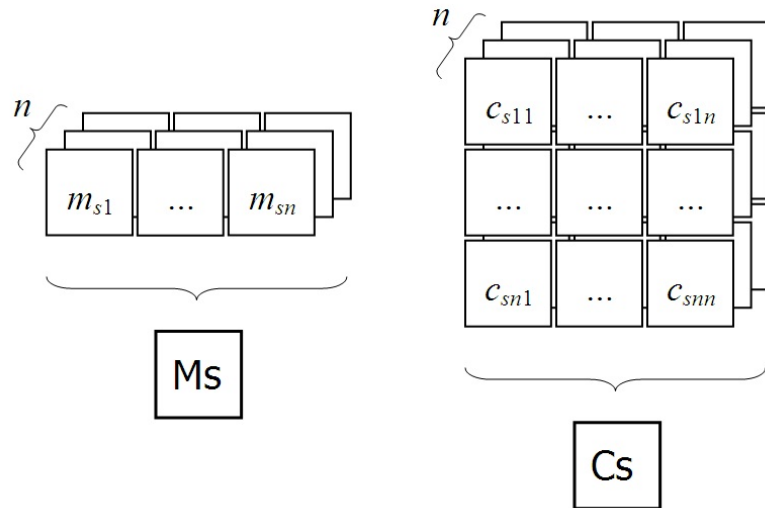


Рис. 4.18 Объектное представление матриц $[M_s]$ и $[C_s]$ на уровне IV алгоритма вычисления динамической модели

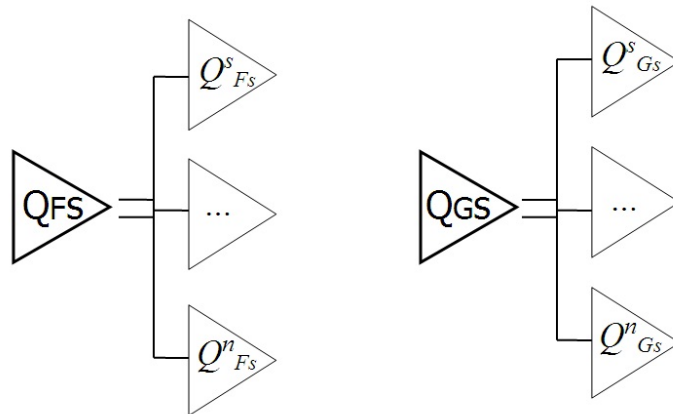


Рис. 4.19 Объектное представление обобщённых сил на уровне IV алгоритма вычисления динамической модели

Иерархическая структура алгоритма параллельных вычислений динамической модели (1.94) разбитого на несколько уровней и соответствующего объектной схеме (см. рис. 4.8) без моделирования внешней нагрузки может быть проиллюстрирована на общей вычислительной схеме (рис. 4.20).

Построение соответствующих вычислительных алгоритмов на каждом уровне алгоритма параллельных вычислений необходимо выполнять с учётом результатов, полученных на основе анализа сложности вычисления матричных выражений, рассмотренного в п. 3.2.3. Представленные в этом пункте результаты анализа матричных выражений, используемых в геометрических моделях мани-

пуляционных систем роботов, указывают на вычислительную эффективность применения матриц промежуточных преобразований однородных координат.

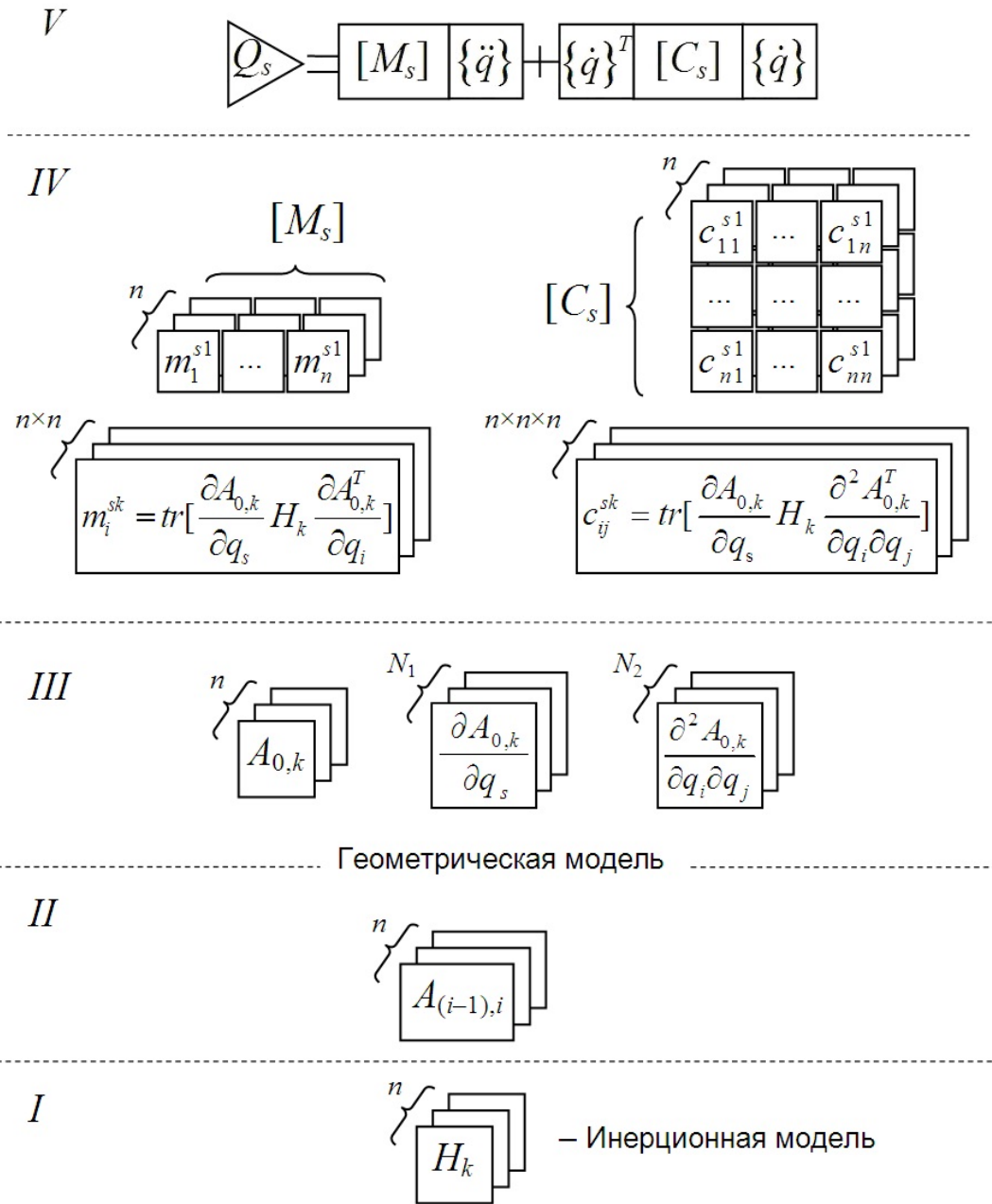


Рис. 4.20. Уровни алгоритма параллельных вычислений динамической модели (1.94)

Дальнейшее распараллеливание вычислений, выполняемых на соответствующих уровнях рассмотренного алгоритма параллельных вычислений динамической модели манипуляционных систем роботов, может быть выполнено на основе алгоритмов параллельных вычислений матричных операций.

4.1.3.3 Алгоритмы параллельных вычислений матричных операций

Рассмотрим граф вычислительного процесса произведения матрицы (4×4) на вектор (4×1) (рис. 4.21), основывающийся на соотношении

$$w_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij} v_j, i = \{1, \dots, 4\}. \quad (4.18)$$

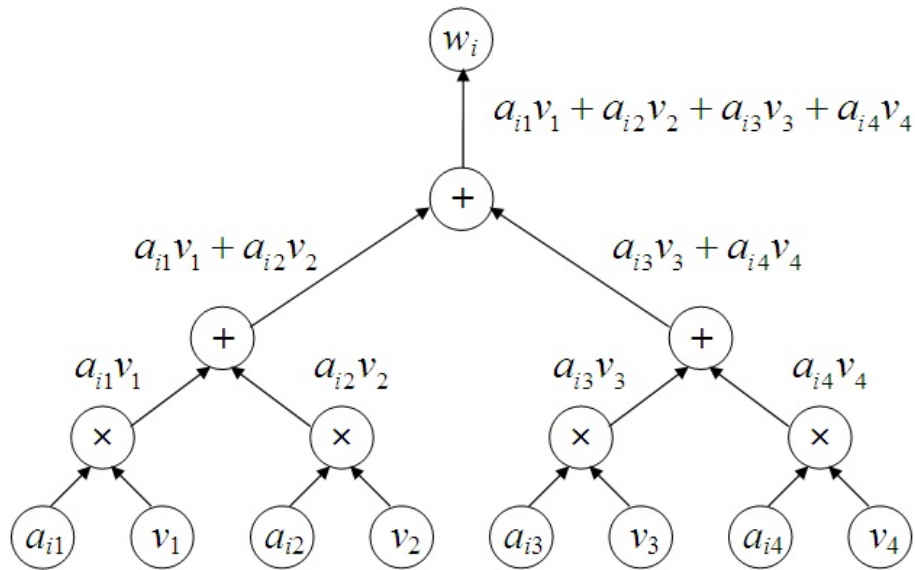


Рис. 4.21 Граф вычислительного процесса произведения матрицы (4×4) на вектор (4×1)

При вычислении произведения матрицы размерности $n \times n$ на соответствующий вектор количество необходимых скалярных операций сложения и умножения может быть оценено величиной

$$T_1 = 2n^2. \quad (4.19)$$

Анализ графа вычислительного процесса (рис. 4.21) показывает, что параллельные способы решения задачи произведения матрицы на вектор могут быть получены на основе использования параллельных алгоритмов суммирования, в данном случае использован каскадный алгоритм суммирования. Кроме того, способ организации параллельных вычислений будет зависеть от количества доступных для использования процессоров.

Нужно отметить, что последовательности выполняемых операций умножения отдельных n строк матрицы на вектор являются независимыми и могут быть выполнены параллельно. Операции умножения каждой строки на вектор включают n независимых операций поэлементного умножения, и тоже могут быть выполнены параллельно. Таким образом, максимально необходимое количество процессоров определяется величиной

$$p = n^2. \quad (4.20)$$

Время выполнения параллельного алгоритма, отнесенное ко времени выполнения одной скалярной операции, при использовании p процессоров определяется временем выполнения операции умножения и временем выполнения каскадного алгоритма суммирования [146]

$$T_p = 1 + \log_2 n. \quad (4.21)$$

Показатели эффективности параллельного алгоритма соответственно

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} = \frac{2n^2}{1 + \log_2 n}, \quad (4.22)$$

где S_p – ускорение для p процессоров, получаемое при использовании параллельного алгоритма;

$$E_p = \frac{S_p}{p} = \frac{2}{1 + \log_2 n}. \quad (4.23)$$

где E_p – эффективность использования процессоров.

Информационный граф, соответствующий вычислительному процессу умножения i -й строки матрицы (4×4) на вектор (4×1) (рис. 4.21), построенный на основе 4-х процессоров, представлен на рис. 4.22.

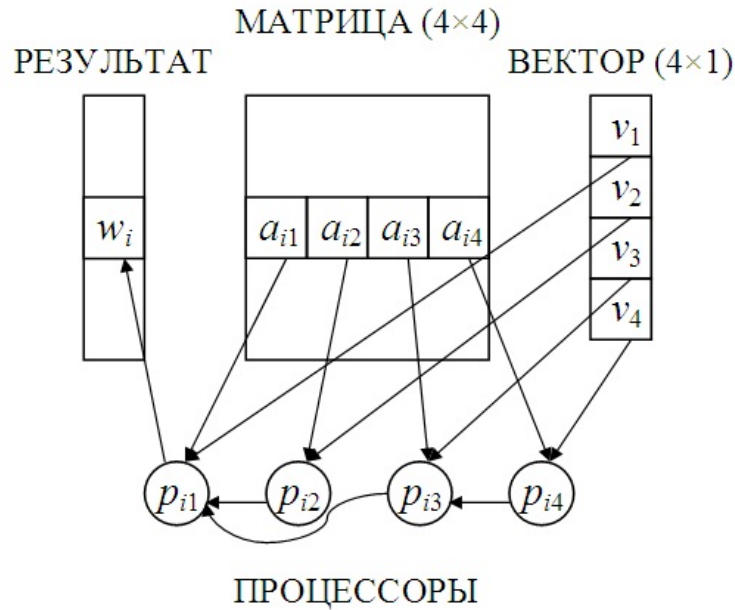


Рис. 4.22 Информационный граф вычислительного процесса произведения i -й строки матрицы (4×4) на вектор (4×1)

Задача умножения прямоугольных матриц определяется соотношением

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}, \quad i = \{1, \dots, n\}, \quad j = \{1, \dots, m\}. \quad (4.24)$$

В случае умножения квадратных матриц размерности $n \times n$ количество скалярных операций умножения и сложения пропорционально n^3 , а для их оценки может быть использована величина

$$T_1 = 2n^3. \quad (4.25)$$

Последовательности выполняемых операций умножения отдельных строк первой матрицы на соответствующий столбец второй матрицы являются независимыми и могут быть выполнены параллельно. Алгоритм параллельного вычисления умножения матриц может быть построен на основе рассмотренного вычислительного алгоритма умножения матрицы на вектор. Соответственно необходимое количество процессоров для максимального распараллеливания вычислительного алгоритма будет определяться величиной

$$p = n^3. \quad (4.26)$$

Информационный граф, соответствующий вычислительному процессу умножения матриц (4×4), построенный на основе 64-х процессоров, представлен на рис. 4.23.

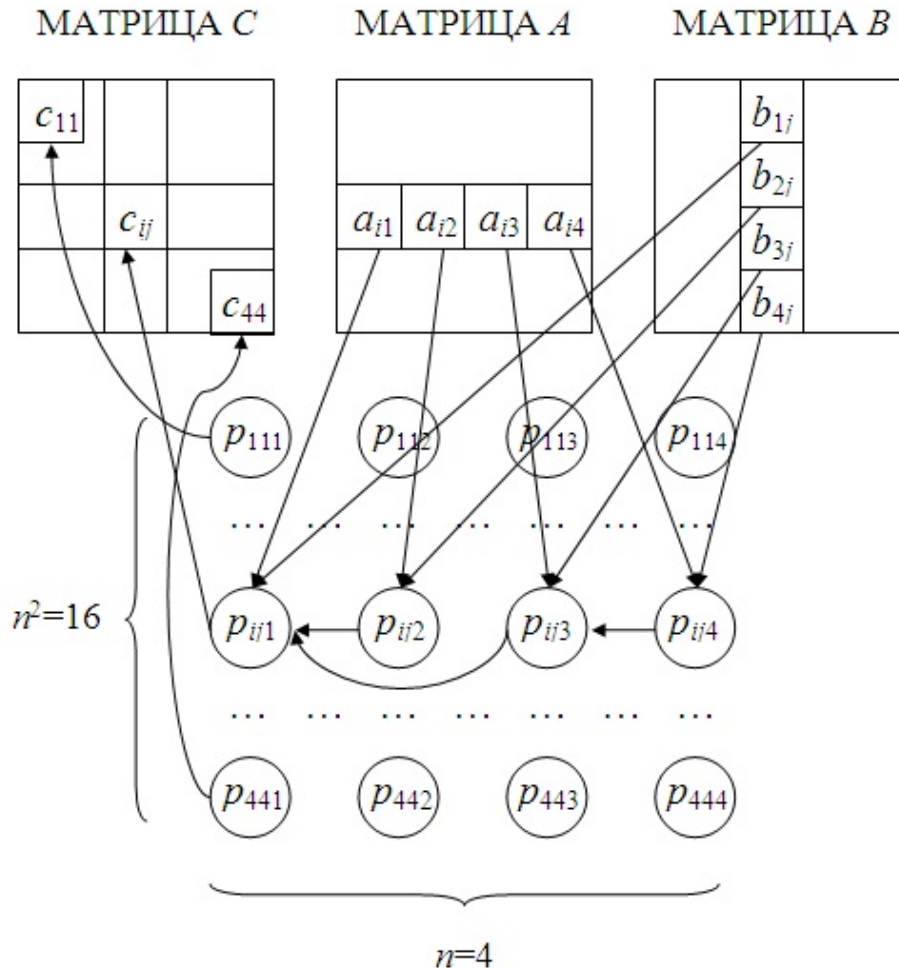


Рис. 4.23 Информационный граф вычислительного процесса умножения матриц (4×4) на основе 64-х процессоров

Время выполнения параллельного алгоритма, как и прежде, будет определяться выражением (4.21). Получаемое ускорение для p процессоров повысится

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} = \frac{2n^3}{1 + \log_2 n}, \quad (4.27)$$

а эффективность использования процессоров в соответствии с (4.23) не изменится.

Анализ данного графа показывает, что для его реализации необходимо одновременно выполнять умножение и транспонирование 6-и матриц (4×4). Умножение таких матриц требует максимального применения 64-х процессоров (рис. 4.23), а их транспонирование 16-и. Таким образом, максимально необходимое количество процессоров для 6-и тел составит $p=(64+16) \times 6=480$ шт., а в общем случае для реализации параллельных вычислений на уровне (I) максимальное число процессоров будет определяться выражением

$$p_I = 80 \sum_{k=1}^n m_k . \quad (4.28)$$

Следует отметить, что на этом уровне (I) алгоритма параллельных вычислений, также, как и на уровне инициализации данных, создаются объекты неизменяющиеся в процессе моделирования, так как эти объекты не зависят от времени и обобщённых координат моделируемой манипуляционной системы.

На уровне II вычисляются объекты соответствующие матрицам $A_{(i-1),i}$ ($i=1, \dots, n$) геометрической модели исследуемой манипуляционной системы. Объектное представление геометрических моделей подробно описано в п.п. 3.2.1.4. На этом уровне количество независимо вычисляемых матриц (4×4) преобразования однородных координат пропорционально числу n степеней свободы манипуляционной системы. Так как максимальное количество процессоров необходимых для одновременного вычисления матриц (4×4) равно 64, то необходимое число процессоров для реализации параллельных вычислений на втором уровне составит

$$p_{II} = 64n . \quad (4.29)$$

На уровне III вычисляются объекты геометрической модели манипуляционной системы соответствующие матрицам $A_{0,k}$ ($k=1, \dots, n$) и матрицам их частных производных (см. п.п. 3.2.4.2). Количества вычисляемых матриц частных производных от $A_{0,k}$ определяются выражениями (4.16) и (4.17). Соответственно для ре-

ализации параллельных вычислений на уровне (III) максимальное число процессоров составит

$$p_{III} = 64(n + N_1 + N_2). \tag{4.30}$$

Для большинства манипуляционных систем промышленных роботов $n=6$. Граф вычислительного процесса матрицы $A_{0,6}$ представлен на рис. 4.25.

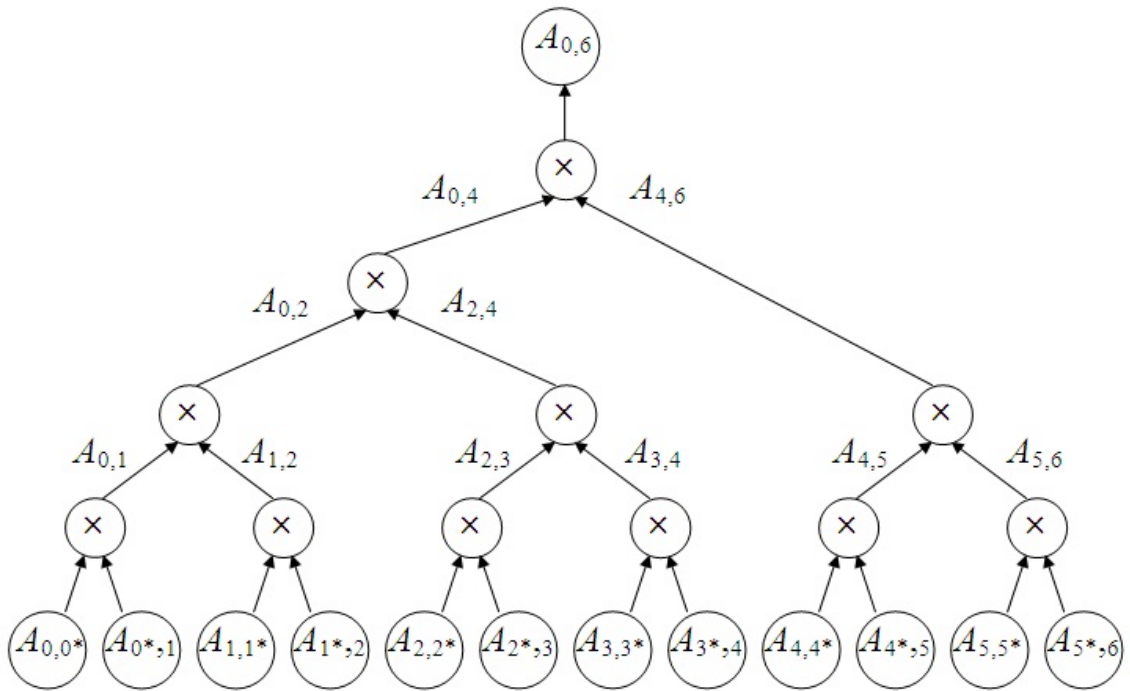


Рис. 4.25 Граф вычислительного процесса матрицы $A_{0,6}$

Граф вычислительного процесса матрицы $\frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_2}$ с использованием матриц дифференцирования (1.22) представлен на рис. 4.26, а матрицы $\frac{\partial^2 A_{0,6}}{\partial q_1 \partial q_3}$ на рис. 4.27.

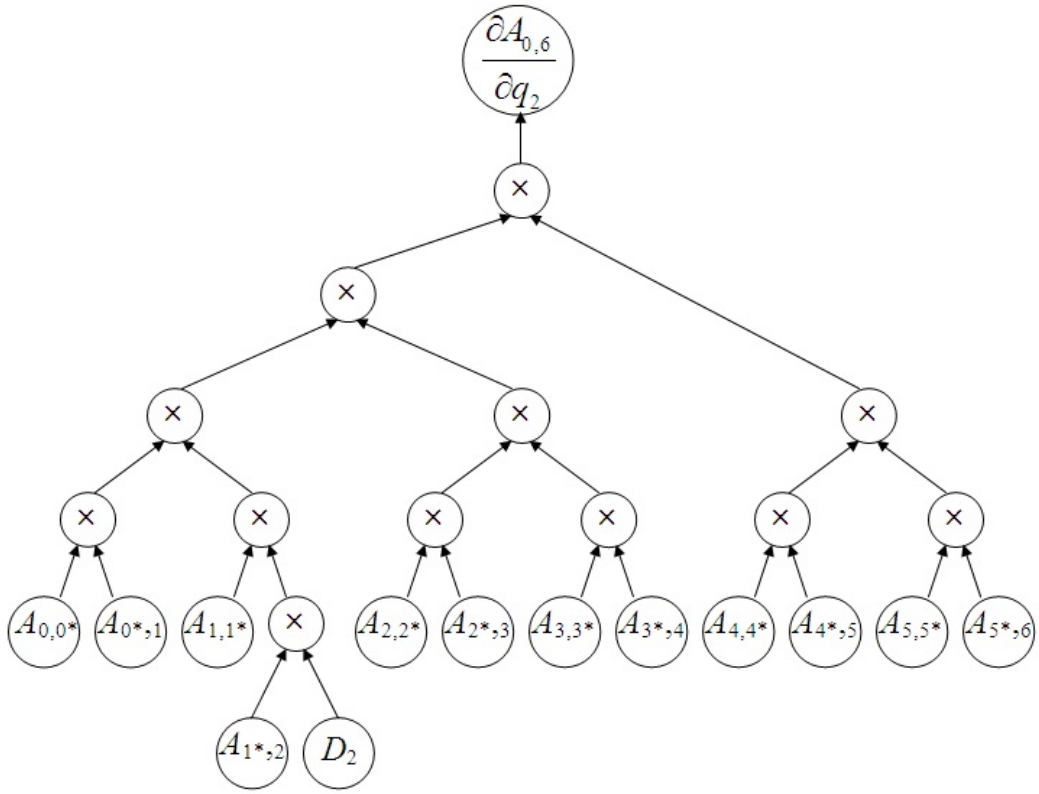


Рис. 4.26 Граф вычислительного процесса матрицы $\frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_2}$

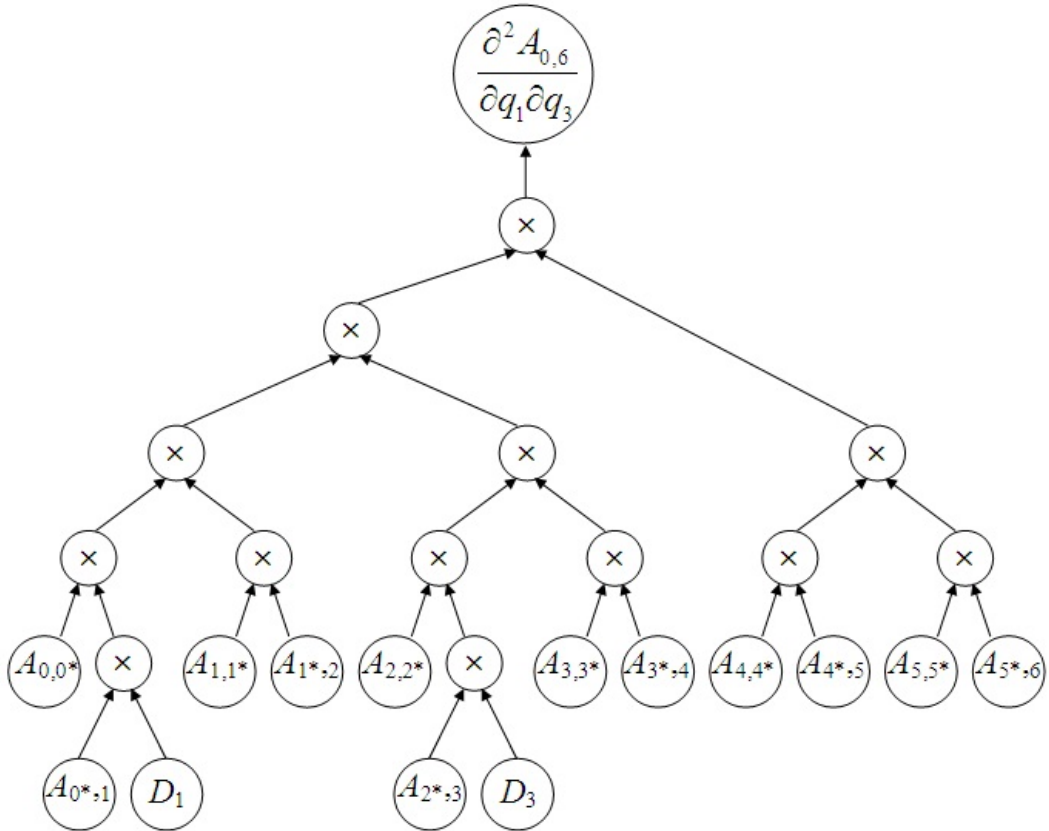


Рис. 4.26 Граф вычислительного процесса матрицы $\frac{\partial^2 A_{0,6}}{\partial q_1 \partial q_3}$

На уровне IV выполняется вычисление элементов матричных коэффициентов динамической модели (1.94) с использованием матриц преобразования однородных координат, их частных производных и матриц инерции звеньев. Данные матрицы имеют размерность 4×4 , а размерность самих матричных коэффициентов $[M_s]$ и $[C_s]$ пропорциональна n – числу степеней свободы манипуляционной системы и соответственно числу её звеньев.

Хотя количество элементов матриц-строк $[M_s]$ ($n \times 1$) пропорционально n^2 , а количество элементов матриц $[C_s]$ ($n \times n$) пропорционально n^3 , количество необходимых вычислений для определения их значений будет существенно меньше.

Так на основании свойств (1.101) и (1.102) количество независимо вычисляемых элементов m_j^{sk} матриц-строк $[M_s]$ будет определяться выражением (4.17), а на основании выражения для элементов c_{ij}^{sk} матриц $[C_s]$ (см. 1.94), их количество будет определяться выражением

$$N_3 = \sum_{s=1}^n \sum_{k=s}^n k^2. \quad (4.31)$$

Графы вычислительных процессов элементов m_1^{23} и c_{12}^{34} представлены на рис. 4.27 и 4.28 соответственно.

Процесс вычисления обобщённых сил Q_{G_s} и Q_{F_s} требует организации параллельных вычислений для всех слагаемых обобщённых сил в количестве

$$N_4 = \sum_{s=1}^n (n+1-s). \quad (4.32)$$

Граф вычислительного процесса слагаемого $Q_{F_2}^3$ обобщённой силы Q_{F_2} представлен на рис. 4.29.

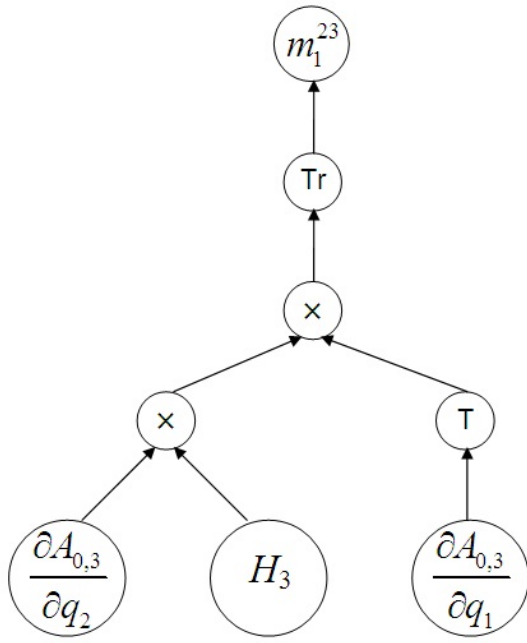


Рис. 4.27 Граф вычислительного процесса элемента m_1^{23}

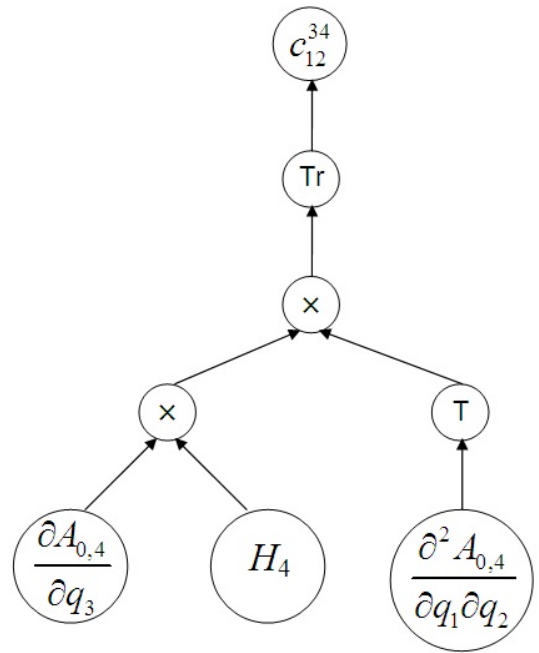


Рис. 4.28 Граф вычислительного процесса элемента c_{12}^{34}

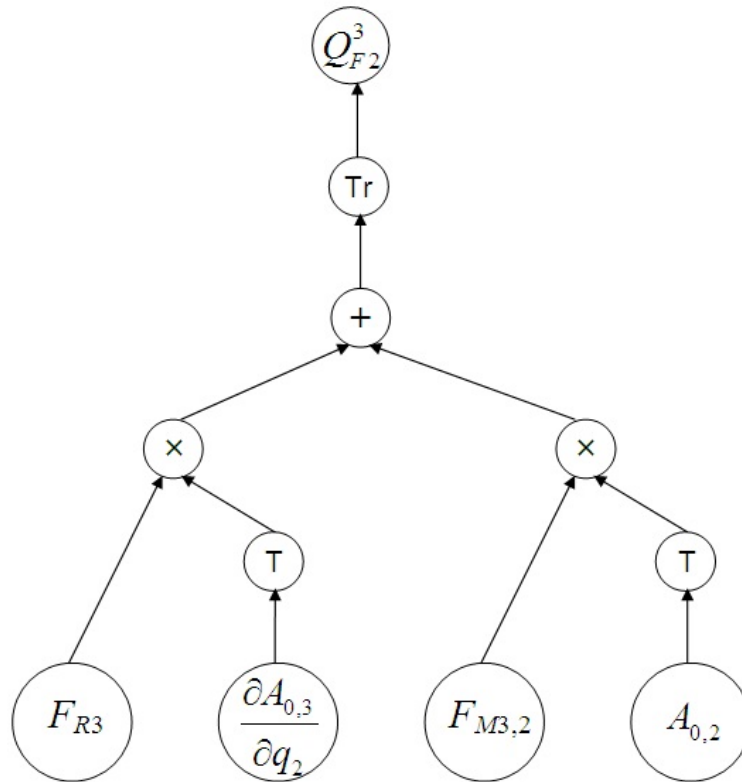


Рис. 4.29 Граф вычислительного процесса слагаемого Q_{F2}^3 обобщенной силы Q_{F2}

Таким образом, для осуществления параллельных вычислений на уровне IV максимальное число процессоров составит

$$p_{IV} = 80(N_2 + N_3) + 192N_4. \quad (4.33)$$

Количество независимо вычисляемых элементов на уровне IV максимально. На этом уровне при уменьшении числа используемых процессоров будет наблюдаться наибольшее замедление.

На уровне V информационный граф вычислительного процесса умножения матрицы $(n \times n)$ на вектор $(n \times 1)$ для динамической модели (1.94) должен строиться по аналогии с информационным графом (рис. 4.22) на основе n процессоров, поэтому для реализации параллельных вычислений на уровне V максимальное число процессоров составит всего

$$p_V = 2n. \quad (4.34)$$

Рассмотренный алгоритм параллельных вычислений динамической модели (1.94) манипуляционных систем роботов может быть реализован на основе объектно-ориентированного подхода с использованием объектных схем, создаваемых из объектов, соответствующих геометрической и инерционной моделям исследуемой манипуляционной системы, а также модели внешней нагрузки.

Применение параллельных вычислительных алгоритмов в задачах моделирования требует от вычислительных систем наличия достаточного количества процессоров. Это требование может быть реализовано на основе многокристальных реконфигурируемых вычислительных систем, созданных на основе применения программируемых логических интегральных схем (ПЛИС). Такие вычислительные системы могут адаптироваться под структуру решаемой задачи и обеспечить реализацию сложных многоуровневых параллельных алгоритмов [147 и 148].

4.2 Генетическое программирование в задачах моделирования манипуляционных систем роботов

4.2.1 Модификация математических моделей манипуляционных систем роботов методом структурных мутаций

4.2.1.1 Индуцированный мутагенез в структуре геометрической модели манипуляционных систем роботов

Процесс возникновения мутаций называют мутагенезом (лат. *mutation* – изменение, перемена, греч. *genesis* – происхождение, поколение). В отношении целенаправленных структурных изменений в математических моделях, выполняемых по методу структурных мутаций, по аналогии с биологическими процессами, исследуемый мутагенез является индуцированным, т.е. возникающим искусственным путём.

Рассмотрим мутагенез данного метода на примере модификации математической модели, описывающей преобразование координат в трёхзвенной манипуляционной системе роботов

$$A_{0,3} = A_{0,1}A_{1,2}A_{2,3}. \quad (4.12)$$

В выражении (4.12) $A_{i,j}$, $i,j=(0-3)$ представляют собой матрицы преобразования однородных координат, имеющие размерность 4×4 . Данные матрицы выполняют отображения $A_{i,j} : S_j \rightarrow S_i$ базисов координатных систем S_i и S_j , связываемых с соответствующими звеньями манипуляционной системы (рис. 4.6)

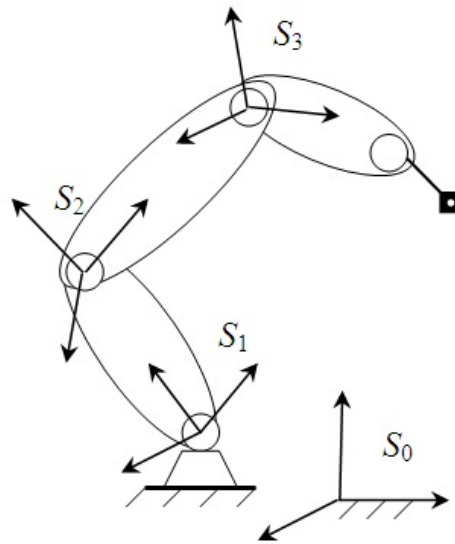


Рис. 4.6. Трёхзвенная манипуляционная система роботов

Объектная схема, соответствующая математической модели (4.12) будет иметь вид (рис. 4.7)

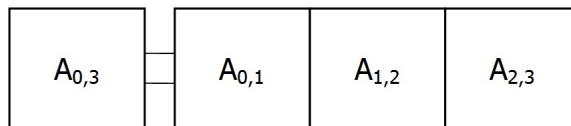
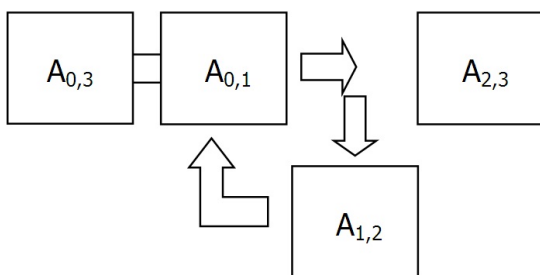
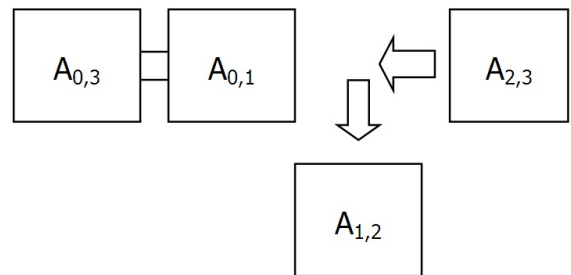


Рис. 4.7. Объектная схема математической модели (4.12)

Данная объектная схема может быть целенаправленно подвержена модификации по методу структурных мутаций математических моделей, например, путём перестановки объектов в схеме местами (рис. 4.8), или путём исключения (удаления) объектов из схемы (рис. 4.9). Также может быть выполнена замена объектов на объекты того же класса, но имеющие другие параметры, или иные объекты, внедрение которых в структуру объектной схемы не нарушает условия непрерывности вычислений, выполняемых по этой объектной схеме.

Рис. 4.8. Перестановка объектов $A_{0,1}$ и $A_{1,2}$ Рис. 4.9. Исключение объекта $A_{1,2}$

На физическом уровне, выполненные модификации исходной математической модели (4.12), приводят, в случае перестановки объектов, к рассмотрению трёхзвенной манипуляционной системы, у которой, в соответствии с рис. 4.8, переставлены местами первое и второе звенья, а исключение объекта, в соответствии с рис. 4.9, к отсоединению второго звена и присоединению третьего звена к первому. Технически такие операции могут быть осуществлены на реальных манипуляционных роботах, конструкция которых выполнена на основе унифицированных модулей.

На практике рассмотренные мутации могут быть реализованы адаптивной системой управления манипуляционного робота в случае возникновения неисправностей в соответствующих звеньях манипуляционной системы. При этом алгоритм управления должен быть построен на основе объектной схемы, являющейся по существу объектно-ориентированной математической моделью, описывающей управляемую систему.

4.2.1.2 Модификация динамических моделей методом структурных мутаций

Рассмотрим применение метода структурных мутаций математических моделей на примере модификации динамических моделей манипуляционных систем роботов. Для моделирования угловых отклонений, возникающих в шарнирах манипуляционных роботов, могут быть использованы уравнения движения манипуляционных систем, в структуре которых используются 3-степенные шарниры. Динамическая модель, построенная на этих уравнениях, будет иметь вид (2.67–2.69) (см. п.п. 2.2.2)

$$\begin{aligned}
 & [M_i^{aa}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{ab}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{ay}] \{\ddot{\gamma}\} + \\
 & + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{aaa}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{abb}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{ayy}] \{\dot{\gamma}\} + \\
 & + 2(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{aab}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{aay}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{aby}] \{\dot{\gamma}\}) = Q_i^a,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [M_i^{\beta\alpha}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{\beta\beta}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{\beta\gamma}] \{\ddot{\gamma}\} + \\
& + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\beta\alpha\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\beta\beta\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{\beta\gamma\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \\
& + 2 \left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\beta\alpha\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\beta\alpha\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\beta\beta\gamma}] \{\dot{\gamma}\} \right) = Q_i^\beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [M_i^{\gamma\alpha}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{\gamma\beta}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{\gamma\gamma}] \{\ddot{\gamma}\} + \\
& + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\gamma\alpha\alpha}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\gamma\beta\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{\gamma\gamma\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \\
& + 2 \left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\gamma\alpha\beta}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{\gamma\alpha\gamma}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{\gamma\beta\gamma}] \{\dot{\gamma}\} \right) = Q_i^\gamma,
\end{aligned}$$

где $\{\dot{\alpha}\}, \{\ddot{\alpha}\}, \{\dot{\beta}\}, \{\ddot{\beta}\}, \{\dot{\gamma}\}, \{\ddot{\gamma}\}$ – векторы $(n \times 1)$ скоростей и ускорений угловых обобщённых координат, соответствующих двум угловым отклонениям α и β , и шарнирной координате γ ; $Q_i^\alpha, Q_i^\beta, Q_i^\gamma$ – обобщённые силы, соответствующие угловым обобщённым координатам α, β и γ в i -м шарнире ($i=1-n$), n – количество звеньев. Матричные коэффициенты уравнений (2.67–2.69) имеют вид аналогичный (2.35–2.36)

$$[M_i^{xy}] = \sum_{k=1}^n \left[\text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial y_1} \right) \quad \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial y_2} \right) \quad \dots \quad \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial y_n} \right) \right], \quad (4.13)$$

$$[C_i^{xyz}] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_1 \partial z_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_1 \partial z_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_1 \partial z_n} \right) \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_2 \partial z_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_2 \partial z_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_2 \partial z_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_n \partial z_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_n \partial z_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial y_n \partial z_n} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

где вместо x, y и z необходимо подставлять соответствующие сочетания угловых координат α, β и γ .

В выражениях элементов матриц (4.13 и 4.14) присутствуют частные производные от матриц преобразования однородных координат (см. п.п. 1.1.3) и матрицы инерции звеньев – H_k ($k=1-n$), имеющие размерность 4×4 (см. п.п. 1.2.4).

Представленная динамическая модель позволяет учитывать угловые отклонения, возникающие при движении манипуляционных систем роботов из-за наличия зазоров и упругого скручивания шарниров. Упругая податливость в уравнениях (2.67–2.69) может быть учтена при составлении правой части этих уравнений заданием упругой составляющей обобщённой силы. Данная динамическая модель корректно моделирует движение манипуляционной системы как при возникновении малых углов закручивания в шарнирах, так и при углах – сопоставимых с изменениями обобщённых координат, задающих программное движение.

При составлении уравнений (2.67–2.69) следует учитывать не коммутативность введенных угловых отклонений. Поэтому в зависимости от выбранной последовательности угловых отклонений могут быть получены соответствующие этой последовательности уравнения. Всего таких последовательностей может быть 6.

Поскольку причины, вызывающие рассматриваемые отклонения, носят случайный характер при моделировании движения реального манипуляционного робота с использованием динамической модели (2.67–2.69) возникает проблема, связанная с определением последовательности угловых отклонений, возникающих в каждом шарнире манипуляционной системы.

По существу задача сводится к формированию матриц $A_{(i-1)^*j}$ определяемых в данном случае последовательностью произведений трёх матриц, каждая из которых соответствует одной из обобщённых координат α , β или γ

$$A_{(i-1)^*j}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$A_{(i-1)^*j}(\beta_i) = \begin{bmatrix} \cos\beta_i & 0 & \sin\beta_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$A_{(i-1)^*j}(\gamma_i) = \begin{bmatrix} \cos(b_i\gamma_i) & -\sin(b_i\gamma_i) & 0 & 0 \\ \sin(b_i\gamma_i) & \cos(b_i\gamma_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-b_i)\gamma_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$b_i=1$, если i -й шарнир является вращательным, и $b_i=0$ – если поступательным.

Представленная ниже последовательность выражений наглядно иллюстрирует данную проблему, которая усугубляется ещё и тем, что подобный выбор необходимо выполнять для каждого шарнира.

$$\begin{aligned} A_{(i-1)^*j}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) &= A_{(i-1)^*j}(\alpha_i) A_{(i-1)^*j}(\beta_i) A_{(i-1)^*j}(\gamma_i), \\ A_{(i-1)^*j}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) &= A_{(i-1)^*j}(\alpha_i) A_{(i-1)^*j}(\gamma_i) A_{(i-1)^*j}(\beta_i), \\ A_{(i-1)^*j}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) &= A_{(i-1)^*j}(\beta_i) A_{(i-1)^*j}(\alpha_i) A_{(i-1)^*j}(\gamma_i), \\ A_{(i-1)^*j}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) &= A_{(i-1)^*j}(\beta_i) A_{(i-1)^*j}(\gamma_i) A_{(i-1)^*j}(\alpha_i), \\ A_{(i-1)^*j}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) &= A_{(i-1)^*j}(\gamma_i) A_{(i-1)^*j}(\alpha_i) A_{(i-1)^*j}(\beta_i), \\ A_{(i-1)^*j}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) &= A_{(i-1)^*j}(\gamma_i) A_{(i-1)^*j}(\beta_i) A_{(i-1)^*j}(\alpha_i). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Обеспечить необходимую адекватность синтезируемой динамической модели реальному манипуляционному роботу можно на основе совместного перебора всех сочетаний (комбинаций) возможных угловых отклонений для всех шарниров (4.18). При этом для каждого такого сочетания необходимо сформировать динамическую модель (2.67–2.69) и сопоставить получаемые на её основе результа-

ты с движением реального робота. Метод структурных мутаций математических моделей позволяет автоматизировать данную процедуру.

Для использования этого метода предварительно необходимо создать объектную схему исследуемой динамической модели. Для динамической модели (2.67–2.69) объектная схема будет иметь сложный комплексный вид (комплекс), включающий в себя последовательности структурных схем (компоненты), реализующих отдельные части динамической модели.

Например, второй элемент m_{123}^{xy} матрицы-строки $[M_1^{xy}]$, соответствующий третьему звену ($k=3$, см. (4.13)), может быть вычислен на основании выражения

$$m_{123}^{xy} = tr \left(\frac{\partial A_{0,3}}{\partial x_1} H_3 \frac{\partial A_{0,3}^T}{\partial y_2} \right). \quad (4.19)$$

Объектная схема, соответствующая математической модели (4.19), имеет вид (рис. 4.10). В схеме скалярный объект и операция tr , выполняющая вычисление суммы диагональных элементов матрицы, обозначены треугольным графическим элементом. Операция транспонирования матриц выполняется через операцию присваивания и изображается элементом схемы, обозначающим операцию присваивания, с наложенным символом \times . Операция дифференцирования выполняется соответствующим оператором, представленным в данном случае объектами D_1 и D_2 . H_3 – объект, моделирующий инерционные свойства третьего звена.

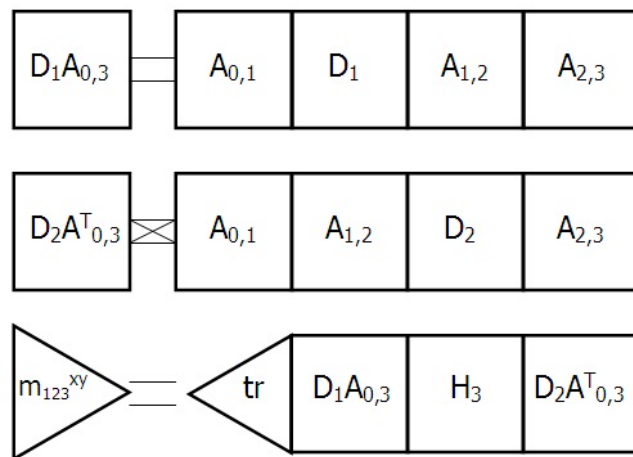


Рис. 4.10. Комплексная схема объектного представления элемента m_{123}^{xy}

Объектные схемы для моделирования остальных элементов матриц $[M_i^{xy}]$ и элементов матриц $[C_i^{xyz}]$ для всех возможных значений индексов x, y, z, i и k могут быть составлены аналогично.

Формализация процедуры создания необходимых объектов и их сборки в объектные схемы основывается на методе визуального конструирования математических моделей. Разработка объектных схем динамических моделей может выполняться в среде специальной компьютерной программы, автоматизирующей данную процедуру.

По методу структурных мутаций объектная схема исследуемой динамической модели может быть модифицирована путём замены её отдельных частей на аналогичные. При этом должно соблюдаться условие непрерывности вычислений, выполняемых на основе модифицированной модели.

При модификации динамической модели (2.67–2.69) необходимо, в той части её объектной схемы, которой соответствует математическая модель, описывающая положение манипуляционной системы в рабочем пространстве робота, выполнить замену объекта соответствующего матрице $A_{(i-1)^*j}$ на аналогичный объект из списка (4.18), содержащего последовательность возможных сочетаний угловых отклонений. Тогда сформированные на их основе объекты, путём рокировки соседних объектов или круговой перестановки (рис. 4.11 и 4.12) могут быть использованы для замещения (исключения) объектов (рис. 4.13), соответствующих матрицам (1.8), получаемым на основе выражения

$$A_{(i-1),i} = A_{(i-1),(i-1)^*} A_{(i-1)^*,i} (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i). \quad (4.20)$$

Новые объекты будут автоматически использованы в соответствующих частях объектной схемы исследуемой динамической модели.

Таким образом, относительно сложная динамическая модель, описывающая движение n -звенной манипуляционной системы, представленная своей объектной схемой, может быть легко модифицирована по методу целенаправленных структурных мутаций математических моделей. При этом модификация может быть выполнена как на параметрическом, так и на структурном уровне.

По аналогии с рассмотренным ранее примером модификации геометрической модели трёхзвенной манипуляционной системы, путём перестановки и замены её звеньев, в данном случае моделируются варианты, описывающие последовательности возникающих отклонений (перекосов) в шарнирах манипуляционной системы. Внесенные в объектную схему изменения путём перестановки соответствующих объектов, автоматически учитываются в динамической модели.

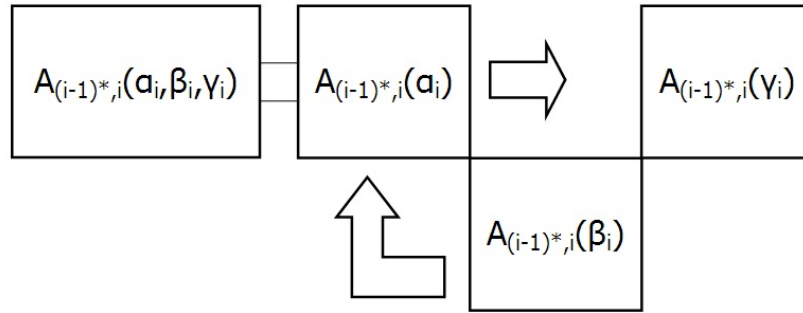


Рис. 4.11. Рокировка объектов в модели $A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i)A_{(i-1)^*,i}(\beta_i)A_{(i-1)^*,i}(\gamma_i)$,
по варианту $A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = A_{(i-1)^*,i}(\beta_i)A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i)A_{(i-1)^*,i}(\gamma_i)$,

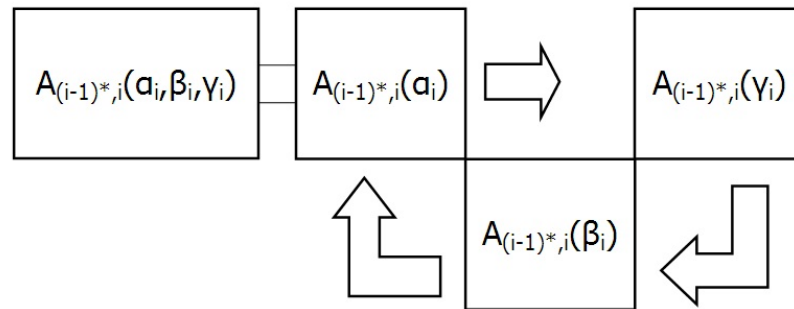


Рис. 4.12. Круговая перестановка объектов в модели $A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i)A_{(i-1)^*,i}(\beta_i)A_{(i-1)^*,i}(\gamma_i)$,
по варианту $A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = A_{(i-1)^*,i}(\beta_i)A_{(i-1)^*,i}(\gamma_i)A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i)$,

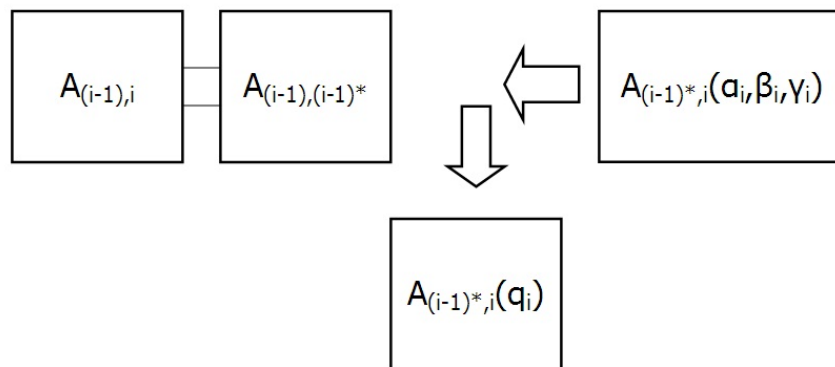


Рис. 4.13. Замещение объекта в модели $A_{(i-1),i}(q_i) = A_{(i-1),(i-1)^*}A_{(i-1)^*,i}(q_i) \rightarrow A_{(i-1),i} = A_{(i-1),(i-1)^*}A_{(i-1)^*,i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$

4.2.2 Генетическое программирование объектно-ориентированных математических моделей манипуляционных систем роботов

4.2.2.1 Генетический алгоритм

Структурные мутации математических моделей являются составной частью технологии генетического программирования, основывающегося на различных генетических алгоритмах, представляющих собой разновидность стохастического метода поиска оптимальных решений. Генетический алгоритм (англ. genetic algorithm) реализуется в виде вычислительной процедуры (англ. solver) которая выполняет поиск глобального экстремума заданной целевой функции, называемой, в данном контексте, фитнес-функцией (англ. fitness function).

Большая часть используемых при описании генетического алгоритма терминов заимствована из генетики (раздел биологии). Название алгоритма отражает эволюционный принцип движения к поставленной цели, основывающийся на отборе лучших промежуточных результатов и последующего использования их для дальнейшего улучшения. Рассмотрим основные понятия и соответствующие им термины.

Особь (хромосома) – промежуточное решение задачи, представляющее собой упорядоченное множество значений искомым переменных (характеристик, параметров). Ген – значение искомой переменной определённого типа, соответствующей одному из параметров исследуемой модели. Хромосома, как правило, состоит из последовательности нескольких генов, при программировании может быть представлена массивом, элементами которого являются соответствующие гены. Место, соответствующее положению данного гена в хромосоме, называется локусом. Различные формы одного и того же гена, расположенные в одинаковых локусах, называют аллелями.

Популяция объединяет в себе несколько особей и имеет в большинстве случаев ограниченный размер. Первоначальная популяция генерируется случайной функцией. Последующие изменения, происходящие с особями внутри популяции,

выполняются в цикле (for) по поколениям ($i=1 \dots N_{\max}$) и отражаются средним значением фитнес-функций (англ. mean fitness) по всей популяции, вычисляемых на значениях генов каждой особи. Выход из цикла (досрочный) задаётся условием стабилизации mean fitness с заданной точностью ($\epsilon > 0$). По окончании вычислений при выходе из цикла определяется особь, на значениях генов которой фитнес-функция имеет лучшее значение (англ. best fitness). Значения данных генов принимаются в качестве решения поставленной задачи.

Изменения, происходящие с хромосомами особей внутри цикла по поколениям, осуществляются с использованием генетических операторов. Основными операторами в генетическом алгоритме являются оператор выбора родителей, оператор скрещивания родительских хромосом (оператор рекомбинации), оператор мутации, оператор отбора особей в новую популяцию и др. Все генетические операторы реализуются с использованием случайных функций, поэтому генетические алгоритмы относятся к стохастическим методам. Блок-схема простого генетического алгоритма представлена на рис. 4.14.

При выборе родителей отбираются пары особей со значениями фитнес-функций большими или равными mean fitness. Таким образом, реализуется принцип селективного отбора, при котором потомство оставляют только лучшие особи. Необходимо учитывать, что селективный отбор обеспечивает быструю сходимость к одному из локальных экстремумов. При практической реализации выбора родителей в генетическом алгоритме используют различные методы, наиболее распространёнными являются турнирный (англ. tournament selection) и рулеточный (англ. roulette-wheel selection).

Оператор рекомбинации путём обмена соответствующих частей двух родительских хромосом создаёт две хромосомы потомков. Практическая реализация оператора рекомбинации может основываться на различных методах деления родительских хромосом на отдельные части (англ. discrete recombination) и составления из этих частей хромосом потомков.

В отличие от операторов выбора родителей и рекомбинации, приводящих к локальным решениям задачи оптимизации, оператор мутации (англ. mutation)

препятствует преждевременной сходимости генетического алгоритма и позволяет расширить область поиска решений, тем самым увеличивая вероятность нахождения глобальных экстремумов. В результате выполнения мутации изменяется один или несколько генов в хромосомах случайно выбранных особей. Вероятность возникновения мутации в хромосоме той или иной особи может быть, как фиксированной, так и изменяющейся в процессе выполнения алгоритма величиной.

Отбор особей в новую популяцию выполняется с учётом значений фитнес-функций, вычисляемых для каждой особи. Например, может быть использован метод отбора усечением (англ. Truncation selection), по которому последовательность особей претендентов перехода в новую популяцию формируется в порядке возрастания значений их фитнес-функций.

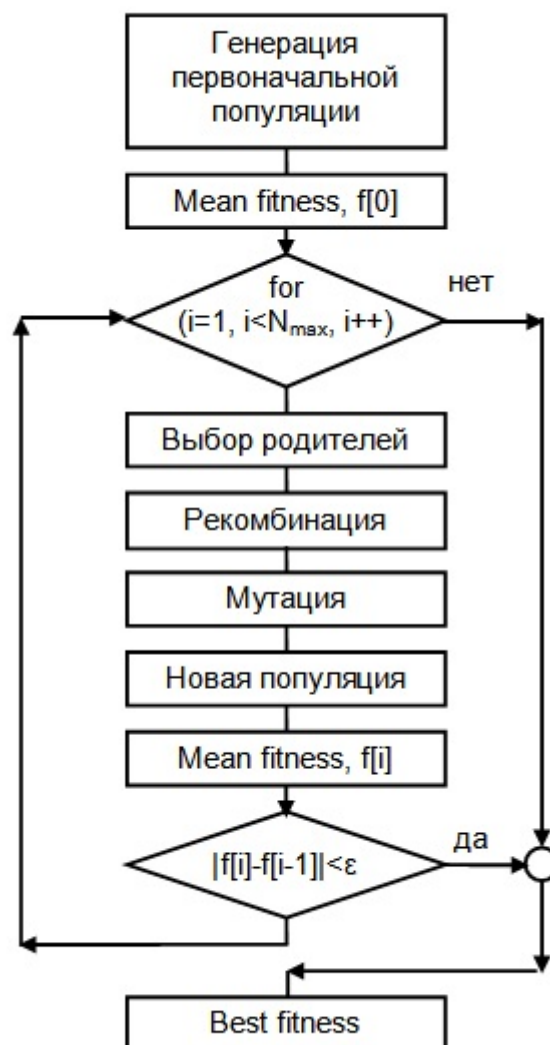


Рис. 4.14. Простой генетический алгоритм

Генетический алгоритм может быть распараллелен и выполняться на многопроцессорных вычислительных системах (транспьютерах). Например, если популяция состоит из N особей, то вычислительная система, содержащая $N/2$ процессоров, выполнит операцию рекомбинации над всеми особями популяции и сформирует новое поколение за несколько тактов работы одного процессора.

4.2.2.2 Решение обратной задачи кинематики на основе генетического алгоритма

Использование генетического алгоритма можно рассмотреть на примере обратной задачи кинематики манипуляционных систем роботов. Постановка задачи состоит в нахождении обобщённых (шарнирных) координат манипуляционной системы по заданным декартовым (прямоугольным) координатам движения характерной точки (*TCP* – tool center point) её конечного звена. Каждой точке траектории движения *TCP* должен быть поставлен в соответствие вектор обобщённых координат, определяющий положение (конфигурацию) манипуляционной системы в этой точке. Ранее были рассмотрены некоторые методы решения данной задачи (п. 1.1.3).

Проведём исследование двух манипуляционных систем. Сначала рассмотрим трёхзвенную манипуляционную систему, в которой первый и третий шарниры вращательные, а второй – поступательный (рис. 4.15). Затем рассмотрим четырёхзвенную манипуляционную систему, в которой первый и третий шарниры также вращательные, а второй и четвёртый – поступательные (рис. 4.16).

Положение *TCP* в неподвижной системе координат S_0 может быть описано радиус-вектором $r = [x \ y \ z]^T$. Для трёхзвенной манипуляционной системы (рис. 4.15) данный вектор может быть представлен выражением

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cos(q_1) \cos(q_3) \\ l_3 \sin(q_1) \cos(q_3) \\ q_2 + l_1 + l_2 + l_3 \sin(q_3) \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Для четырёхзвенной манипуляционной системы (рис. 4.16) выражение для радиус-вектора TCP примет вид

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_3 + q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) \\ (l_3 + q_4) \sin(q_1) \cos(q_3) \\ q_2 + l_1 + l_2 + (l_3 + q_4) \sin(q_3) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

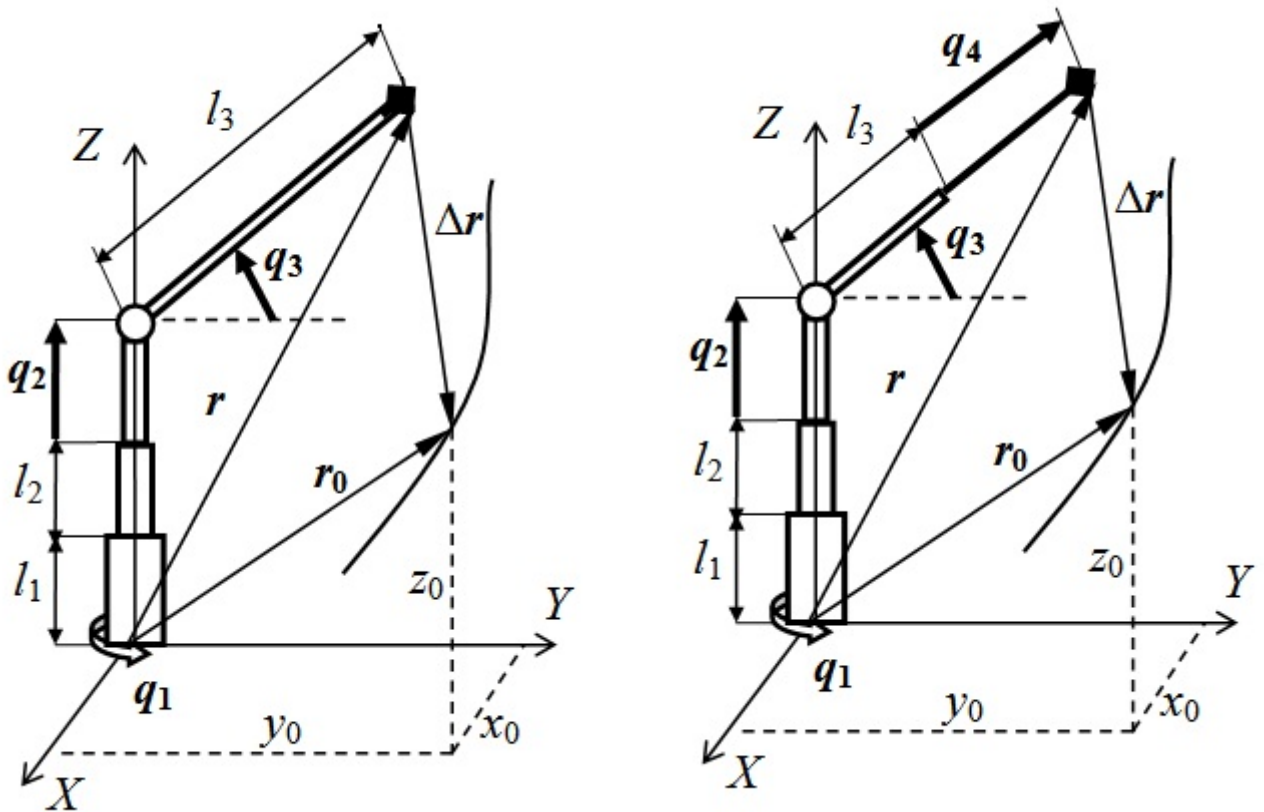


Рис. 4.15. 3-звенная манипуляционная система Рис. 4.16. 4-звенная манипуляционная система

Положение произвольно выбранной точки на заданной траектории движения может быть представлено радиус-вектором $r_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$. При совпадении TCP с данной точкой траектории $r = r_0$. При переводе TCP из текущей точки в следующую точку траектории необходимо решить векторное уравнение $r_0 - r = \Delta r$. В общем случае задача сводится к решению системы нелинейных уравнений.

С использованием генетического алгоритма данная задача может быть решена путём введения в рассмотрение фитнес-функции f , соответствующей квадрату вектора Δr

$$f = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2. \quad (4.23)$$

Путём минимизации фитнес-функции (4.23) могут быть получены решения обратной задачи кинематики для различных точек траектории движения *TCP*.

Проведём исследования трёхзвенной манипуляционной системы. Положим $l_1=0.5$, $l_2=0.5$, $l_3=1$. Выберем точку на траектории движения, например, $x_0=1$, $y_0=0$ и $z_0=1$. Введём ограничения для значений искомым обобщённых координат, определив для них интервалы допустимых значений: $0 \leq q_1 \leq 2\pi$, $0 \leq q_2 \leq 0.5$, $-\pi/2 \leq q_3 \leq \pi/2$.

Вычисления на основе генетического алгоритма, выполненные с использованием солвера *ga* (Genetic Algorithm) MATLAB R2018b, дали результат: $q_1=0.0$, $q_2=0.0$, $q_3=0.0$, Best fitness $f=4.9E-9$. Процесс поиска решений проиллюстрирован вычислением среднего значения фитнес-функции Mean fitness (4.23) для каждой популяции Generation (рис. 4.17).

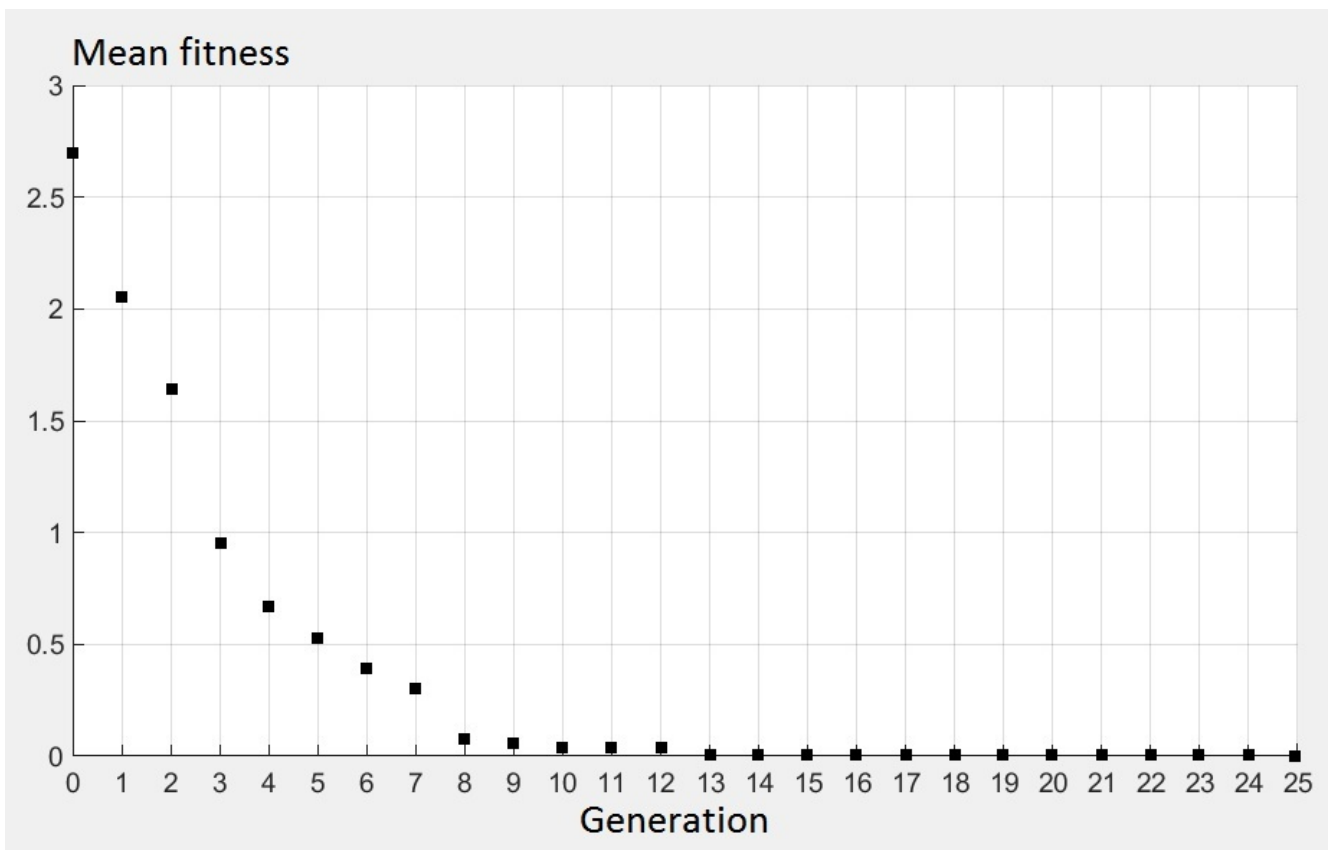


Рис. 4.17. Результаты вычисления Mean fitness для фитнес-функции опред. выражением (4.21)

Как видно из полученных данных (рис. 4.17) генетический алгоритм даёт быструю сходимость с высокой степенью точности.

Проведём исследования четырёхзвенной манипуляционной системы. Положим $l_1=0.5$, $l_2=0.5$, $l_3=0.5$. Выберем ту же точку на траектории движения $x_0=1$, $y_0=0$ и $z_0=1$. Введём ограничения для значений искомым обобщённых координат, определив для них интервалы допустимых значений: $0 \leq q_1 \leq 2\pi$, $0 \leq q_2 \leq 0.5$, $-\pi/2 \leq q_3 \leq \pi/2$, $0 \leq q_4 \leq 0.5$. Необходимо отметить, что данная манипуляционная система имеет кинематическую избыточность, поэтому обратная задача кинематики будет иметь бесконечное множество решений.

Один из результатов вычислений, полученных с использованием того же солвера: $q_1=0.0$, $q_2=0.151$, $q_3=-0.151$, $q_4=0.5$, Best fitness $f=1.3E-4$ (рис. 4.18).

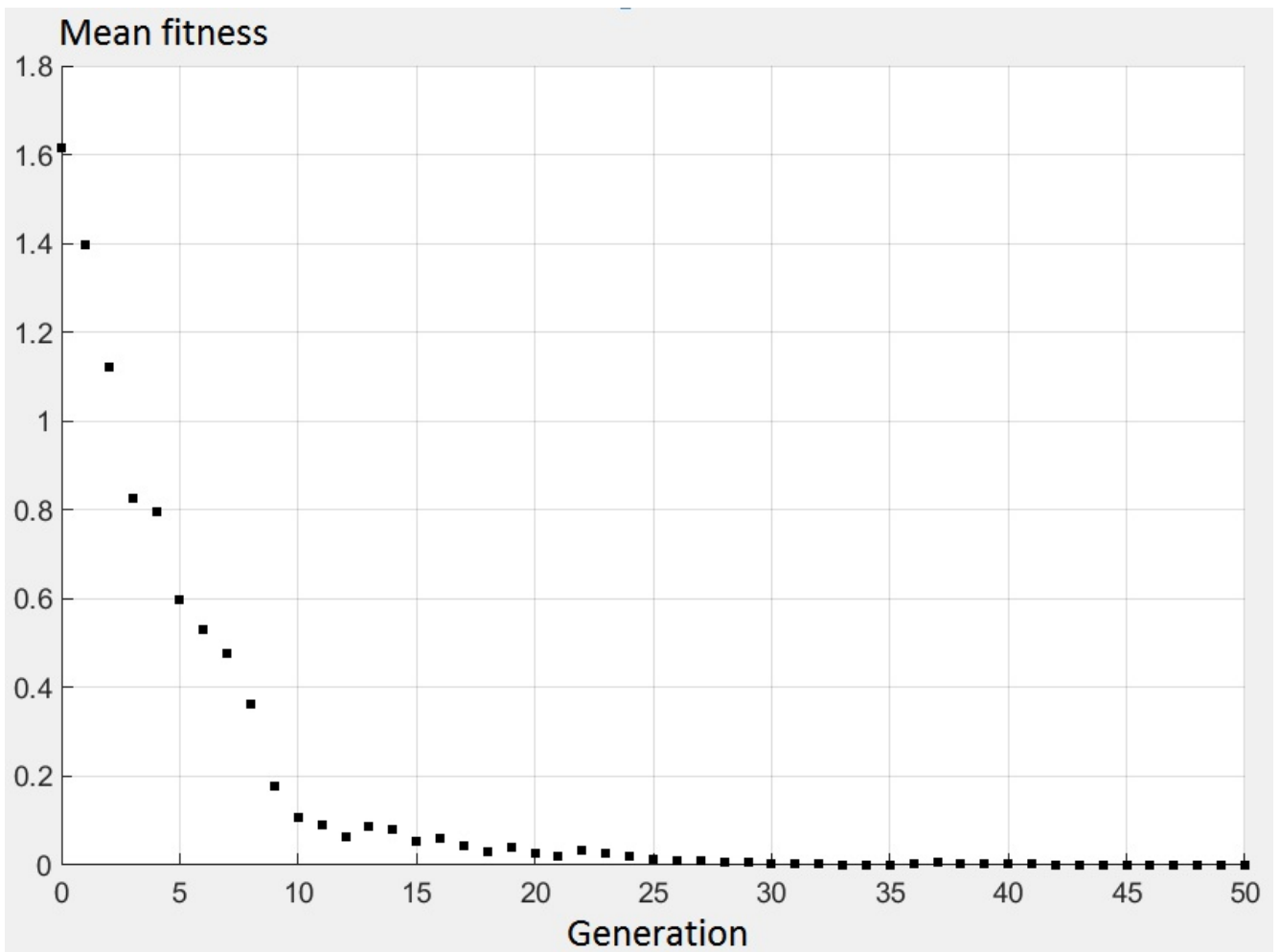


Рис. 4.18. Результаты вычисления Mean fitness для фитнес-функции опред. выражением (4.22)

4.2.2.3 Генетическое программирование

Традиционно генетическое программирование рассматривается как технология автоматического синтеза компьютерных программ на основе эволюционных алгоритмов. В данном случае отдельные гены и составленные из них хромосомы представляют собой части компьютерных программ, (программный код) которые в результате применения генетических операторов могут изменяться или заменяться на другой код.

В случае генетического программирования, введенные ранее при описании генетического алгоритма, понятия локус и аллели приобретают конкретное содержание. Если рассматривать исходный код компьютерной программы, то локусы, это строки вызова подпрограмм в головной программе, а аллели, это сами подпрограммы, соответствующие шаблону, указанному в вызывающей их строке. При этом подпрограммы, удовлетворяющие заданным условиям, могут быть, как выбраны из существующих библиотек, так и синтезированы из составляющих их частей.

Для составления алгоритма, реализующего генетическое программирование, компьютерные программы удобно представить в виде графов, часто имеющих древовидную структуру. Корневой вершиной графа является главная функция (англ. main function) компьютерной программы, а концевыми вершинами переменные и константы. Каждая отдельная подпрограмма, рассматриваемая как функция, возвращающая определённые значения в результате обработки передаваемых в неё параметров (переменных), может быть представлена графом вычислительного процесса, реализуемого данной подпрограммой.

На рис. 4.19 и 4.20 представлены графы вычислительных процессов, описываемых функциями, соответствующими родителю 1 и родителю 2. На этих графах поперечной линией определены места деления хромосом, соответствующих этим особям. На рис. 4.21 и 4.22 представлены графы вычислительных процессов, соответствующих потомку 1 и потомку 2, получаемым в результате выполнения рекомбинации родительских хромосом.

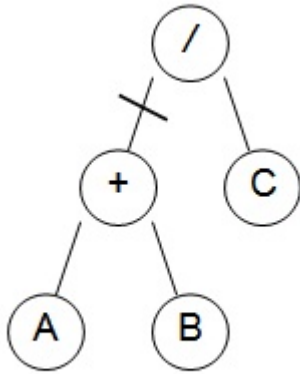


Рис. 4.19. Родитель 1.

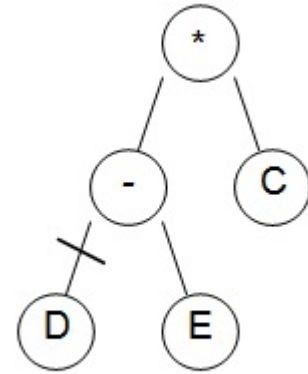


Рис. 4.20. Родитель 2.

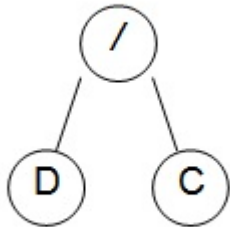


Рис. 4.21. Потомок 1.

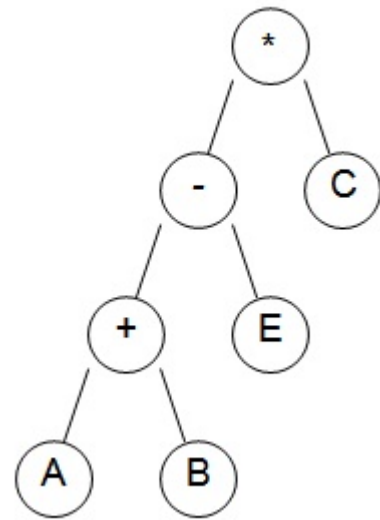


Рис. 4.22. Потомок 2.

Таким образом, рассмотренные ранее методы анализа вычислительных процессов на основе соответствующих им графов, могут быть использованы при синтезе и анализе алгоритмов генетического программирования. Точно также могут быть использованы рассмотренные ранее методы построения алгоритмов параллельных вычислений.

Основываясь на имеющейся аналогии в создании и модификации компьютерных программ и объектных схем, предлагается распространить технологию генетического программирования на синтез и анализ математических моделей. В данной работе показано, что математическая модель может быть представлена в виде соответствующей ей объектной схемы. В такой постановке задача генетиче-

ского программирования может формулироваться как задача поиска оптимальной структуры объектной схемы на основе генетического алгоритма.

И наконец, в прикладном плане, основываясь на полученном и представленном в настоящей диссертации материале можно распространить технологию генетического программирования на синтез и модификацию объектных схем, используемых для моделирования манипуляционных систем роботов.

4.2.2.4 Оптимизация объектных схем методом генетического программирования

Ранее в п. 4.2.1 были описаны процедуры модификации геометрической модели (п. 4.2.1.1) и затем динамической модели (п. 4.2.1.2), выполненные на основе метода структурных мутаций. Данный метод модификации математических моделей, представленных в виде объектных схем, может быть использован в генетическом алгоритме при реализации операции мутации.

Выполнение операции рекомбинации требует наличие уже как минимум двух математических моделей (особей), представленных своими объектными схемами, рассматриваемыми в качестве хромосом. Объекты, последовательно связанные в схемах, будут соответствовать генам.

Количество особей в популяции, необходимое для эффективной работы генетического алгоритма, определяется опытным путём и в большинстве случаев составляет несколько десятков. Генерация первоначальной популяции может быть выполнена путём составления математических моделей, описывающих различные манипуляционные системы роботов, в той, или иной мере, соответствующих техническим условиям.

В процессе работы генетического алгоритма, при выполнении генетических операторов, происходят изменения в объектных схемах. Отбор объектных схем в новую популяцию выполняется на основе вычисления фитнес-функций для каждой особи.

Вид фитнес-функции определяется критерием, соответствующим задаче оптимизации. Например, функция, вычисляющая сумму квадратов разностей обоб-

щённых координат для ближайших точек исследуемых траекторий движения, соответствует решению задачи синтеза оптимальной кинематической схемы (геометрической модели) робота для выбранных траекторий движения в его рабочем пространстве.

Необходимо также отметить, что изменения в объектных схемах могут затрагивать не только геометрическую модель манипуляционной системы робота, но и её инерционную модель. Поэтому, при составлении фитнес-функции помимо кинематических критериев необходимо учитывать и динамические свойства системы.

При разработке генетического алгоритма для реализации технологии генетического программирования объектных схем, соответствующих объектно-ориентированным математическим моделям манипуляционные системы роботов, необходимо учитывать то, что строгость математической модели может быть нарушена при выполнении генетических операторов над отдельными её частями-объектами, рассматриваемыми в качестве генов. Например, если для объектов соответствующих элементу m_{123}^{xy} (рис. 4.10) матрицы-строки $[M_1^{xy}]$ в динамической модели (2.67–2.69) разрешить выполнение генетической операции рекомбинации, то в результате получатся потомки содержащие гены-объекты, значения которых будут вычисляться строго говоря неверно (рис. 4.23–4.26).



Рис. 4.23. Хромосома особи первого родителя



Рис. 4.24. Хромосома особи второго родителя



Рис. 4.25. Хромосома особи первого потомка



Рис. 4.26. Хромосома особи второго потомка

Исключить подобного рода ситуации можно наложив ограничение на выполнение генетического алгоритма, разрешив выполнение генетических операций над хромосомами-объектами, соответствующими только геометрической и инерционной моделям манипуляционных систем роботов.

4.3 Выводы

Разработка математической модели представляет собой многократно повторяющийся процесс математического моделирования, включающий в себя три последовательных этапа:

- составление математической модели, как формального описания взаимосвязей параметров, характеризующих объект исследования, на основе законов, описывающих природу этого объекта и протекающих в нем процессов;
- алгоритмизация и программирование вычислений, выполняемых на основе математической модели, для компьютерного моделирования;
- проведение численного эксперимента.

Разработанная методология предлагает не ограничиваться составлением математических моделей в форме систем уравнений, а создавать эквивалентные этим математическим моделям объектные схемы. Для этого в уравнениях матема-

тических моделей методом декомпозиции предложено выделить части, которым могут быть поставлены в соответствие объекты определённых классов. Это позволяет различные математические модели составлять из отдельных, независимых друг от друга, частей-объектов. Такие части в свою очередь также могут состоять из других более простых частей-объектов.

Составление объектных схем удобно выполнять в среде специально разработанной компьютерной программы, автоматизирующей этот процесс на основе принципа визуального конструирования. Данный подход позволяет объединить первые два этапа разработки математических моделей. При этом для исследователя исключается стадия алгоритмизации и программирования, остаётся только проведение численного эксперимента и анализ его результатов.

Применение объектно-ориентированного подхода в моделировании позволяет реализовать метод визуального конструирования математических моделей, который состоит в том, что различные математические модели составляются из отдельных частей-объектов в интерактивном режиме. В результате объекты соответствующих классов после их инициализации соединяются друг с другом, образуя объектную схему. Порядок соединения объектов определяется соответствующей математической моделью. По существу, создаваемая таким образом объектная схема является объектно-ориентированной формой представления математической модели. Практической реализацией метода визуального конструирования может стать компьютерная программа для сборки математических моделей и моделирования на их основе движения манипуляционных систем роботов.

Разработан алгоритм параллельных вычислений динамической модели манипуляционных систем роботов, в котором определен последовательный ряд уровней (ярусов) на которых выполняются параллельные вычисления и дана оценка количества процессоров, необходимых для обеспечения требуемых показателей эффективности параллельного алгоритма. Метод реализован на основе объектного представления динамической модели, это позволило проводить независимые вычисления отдельных частей модели и наглядно и эффективно выполнить программирование данного алгоритма.

Применение параллельных вычислительных алгоритмов в задачах моделирования требует от вычислительных систем наличия достаточного количества процессоров. Это требование может быть реализовано на основе многокристальных реконфигурируемых вычислительных систем, созданных на основе применения программируемых логических интегральных схем (ПЛИС). Такие вычислительные системы могут адаптироваться под структуру решаемой задачи и обеспечить реализацию сложных многоуровневых параллельных алгоритмов.

Перспективной составляющей разработанной методологии, отражающей её объектно-ориентированную направленность, является разработанный метод целенаправленных структурных мутаций в моделях механизмов. Метод позволяет создавать приближённые математические модели манипуляционных систем, путём модификации их математических моделей, полученных аналитическим способом. Модификация проводится в некоторых местах структурной схемы математической модели путём замены выбранных объектов на альтернативные им объекты. Критерием полезности той или иной мутации является повышение адекватности, получаемой при этом в общем случае уже имитационной модели.

Разработанные объектно-ориентированные методы моделирования позволяют решать задачи синтеза оптимальных структур новых манипуляционных роботов на основе использования генетического алгоритма, являющегося стохастическим методом оптимизации. Генетический алгоритм может быть распараллелен и выполняться на многопроцессорных вычислительных системах (транспьютерах).

По аналогии с созданием и модификацией компьютерных программ и объектных схем, предлагается распространить технологию генетического программирования на синтез и анализ математических моделей. В такой постановке задача генетического программирования может формулироваться как задача поиска оптимальной модели на основе генетического алгоритма. Это позволяет сформулировать научно-обоснованный подход к решению задачи синтеза оптимальных структур манипуляционных систем роботов, на основе объектного описания их математических моделей и последующей модификации получаемых объектных схем, в результате применения генетического алгоритма.

Заключение

Разработана методология построения автоматизированных систем управления манипуляционными роботами на основе математического объектного моделирования задач кинематического и динамического управления, в которой составление соответствующих математических моделей выполняется с использованием проблемно-ориентированных математических объектов. Структура используемых математических объектов строится на основе объектов нескольких базовых классов. Для связывания между собой объектов, соответствующих отдельным частям математических моделей, был разработан формализм визуального программирования объектных схем математических моделей из отдельных частей объектов (Low-code технология).

Новизна предлагаемой методологии состоит в том, что в качестве структурообразующих классов выделены классы, соответствующие множествам специальных матриц. Основными структурообразующими классами являются класс, соответствующий матрицам преобразования однородных координат, и класс, соответствующий матрицам инерции. На основе объектов первого названного класса формируется геометрическая, а на основе объектов второго – инерционная модели манипуляционных систем. Такое определение базовых классов позволило использовать объектно-ориентированный подход при составлении и модификации объектных схем математических моделей манипуляционных систем, а также при создании на их основе алгоритмов параллельных вычислений.

На основе декомпозиции математических моделей, использования метода малого параметра и разработанной методики параметризации геометрических (математических) моделей манипуляционных систем роботов разработаны новые методы моделирования отклонений, возникающих при движении манипуляционных систем из-за первичных геометрических отклонений звеньев, а также упругой податливости и зазоров в шарнирах. Разработан численный метод коррекции интегральных отклонений движения манипуляционных систем, возникающих в результате неточности изготовления и сборки деталей и узлов, составляющих их

звенья. Разработан пакет прикладных программ, реализующий основные задачи моделирования кинематики и динамики манипуляционных систем роботов.

Предложен научно-обоснованный подход к адаптации систем управления манипуляционными роботами путём декомпозиции их объектных моделей в результате применения генетического алгоритма. Разработан метод структурных мутаций в объектно-ориентированных математических моделях. Метод позволяет модифицировать математические модели манипуляционных систем роботов, полученные аналитическим способом и представленные своими объектными схемами. Модификации проводятся в некоторых местах объектных схем путём замены выбранных объектов на альтернативные им объекты. Применение данного метода в генетическом алгоритме позволяет осуществлять поиск оптимальных структур.

Предложенный подход к адаптации позволяет создавать реконфигурируемые системы управления, в которых учитываются и анализируются влияния не только разного рода отклонений и возмущений, но и структурные изменения в управляемой системе. В частности, этот подход открывает перспективы управления роботами-трансформерами и антропоморфными роботами со стохастически изменяющимися структурами

Литература

1. Корендясев, А.И. Манипуляционные системы роботов / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.
2. Корендясев, А.И. Теоретические основы робототехники. В 2 кн. / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес. – М.: Наука, 2006. – Кн. 1. – 383 с. – Кн. 2. – 376 с.
3. Погорелов, Д.Ю. Моделирование связей податливыми шарнирами / Д.Ю. Погорелов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – №1. – С.162–177.
4. Кузьмин, Д.В. Моделирование динамики мехатронных систем. Уравнения и алгоритмы: монография / Д.В. Кузьмин. – Архангельск: Арханг. гос. техн. ун-т, 2008. – 120 с.
5. Морошкин, Ю.Ф. О формах основных уравнений геометрии механизмов / Ю.Ф. Морошкин // Докл. АН СССР. – 1953. – Т.91. – №4. С.25–27.
6. Denavit, J., A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices / J. Denavit, R.S. Hartenberg, // J. Appl. Mech. – 1955. – pp. 215–221.
7. Шахинпур, М. Курс робототехники/ М. Шахинпур.–М.:Мир, 1990.– 527 с.
8. Королева, Л.Н. Вычислительные комплексы и моделирование сложных систем : Сб. тр. фак. вычисл. математики и кибернетики МГУ / Под ред. Л. Н. Королева, П. С. Краснощекова. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 215 с.
9. Воробьев, Е.И. Анализ кинематики пространственных исполнительных механизмов манипуляторов методом матриц / Е.И. Воробьев // Механика машин. – М., 1970. – Вып. 53. – С.8–16.
10. Камышный, Н.И. Кинематика промышленных роботов / Н.И. Камышный, И.И. Павленко // Вестник машиностроения. –1975. –№1. –С.63–65.
11. Овакимов, А.Г. Аналогии скоростей и ускорений пространственных механизмов с несколькими степенями свободы / А.Г. Овакимов // Машиноведение, 1969. –№6. –С. 51–58.

12. Овакимов, А.Г. Аналитический метод определения скоростей и ускорений пространственных механизмов с несколькими степенями свободы / А.Г. Овакимов // *Механика машин*, 1971. – Вып. 35–36. – С. 45.

13. Корендясев, А.И. К решению в явном виде обратной задачи о положениях манипуляторов с шестью степенями подвижности / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес // *Машиноведение*. – 1986. – №3. – С. 10–21.

14. Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол. – М.: Наука, 1976. – 104 с.

15. Челноков, Ю.Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов / Ю.Н. Челноков // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 2013. – №1. – С.38–58.

16. Ломовцева, Е.И. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. II / Е.И. Ломовцева, Ю.Н. Челноков // *Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. – 2014. – Т.14. – вып.1. – С.90–95.

17. Kane, T. Dynamics / T. Kane // *Rihehart and Wiston*. – New York, 1968.

18. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 292 с.

19. Uicker, J.J. Dynamic Force Analysis of Spatial Linkages / J.J. Uicker // *Trans. ASME*. – 1967.

20. Whitney, D.E. The mathematics of coordinated control of prosthetic Arm and Manipulators/ D.E. Whitney// *Trans. ASME, Ser. G, Journ. Dynamic Syst. Meas. and Control*. – 1972. – vol. 94, №4. – pp. 303-309.

21. Mahil, S. On the application of Lagrange's method to the description of dynamic systems / S. Mahil // *IEEE Trans. on SMC*. – 1982. – vol. 12. – no 6.

22. Renaud, N. An efficient iterative analytical procedure for obtaining a robot manipulator dynamic model / N. Renaud // *Proc. of First Int. Symp. of Rob. Research, Bretton Woods*. – New Hampshire, USA. – 1983.

23. Вукобратович, М. Управление манипуляционными роботами / М. Вукобратович, Д. Стокич. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
24. Вукобратович, М. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами / М. Вукобратович, Д. Стокич, Н. Кирчански – М.: Мир, 1989. – 376 с.
25. Кулаков, Ф.М. Супервизорное управление манипуляционными роботами / Ф.М. Кулаков. – М., 1980. – 448 с.
26. Hollerbach, J.M. A Recursive Lagrangian Formuiation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity / J.M. Hollerbach // IEEE Trans. Systems. Man. Cybern. –1980. –no 11. –pp. 730–736.
27. Walker, M.W. Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms. / M.W. Walker, D.E. Orin // ASME J. of Dyn. Syst., Meas. and Contr. –1982. – vol. 104. – no 3. –pp. 205–211.
28. Lee, C.S.G. Development of the Generalized d'Alembert Equations of Motion for Mechanical Manipulators / C.S.G. Lee, B. H. Lee, R. Nigam // Proc. 2nd Conf. Decision and Control. –San Antonio. –1983. –pp. 1205-1210.
29. Воробьев, Е.И. Механика промышленных роботов. Кн. 1. Кинематика и динамика: учеб. пособие для втузов. В 3 кн./ Е.И. Воробьев, О.Д. Егоров, С.А. Попов. –М.: Высш. шк.,1988.
30. Овакимов, А.Г. Обобщенный способ учета инерции различных схем вращательного привода в уравнениях движения манипулятора / А.Г. Овакимов // Машиноведение, 1979. – №4. – С.25–31.
31. Коловский, М.З. Основы динамики промышленных роботов / М.З. Коловский, А.В. Слоущ. –М.: Наука, 1988.
32. Зенкевич, С.Л. Основы управления манипуляционными роботами: учебник для вузов / С.Л. Зенкевич, А.С. Ющенко –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 480 с.
33. Козлов, В.В. Динамика управления роботами / В.В. Козлов, В.П. Макарычев, А.В. Тимофеев, Е.И. Юревич – М.: Наука, 1984.

34. Брицкий, В.Д. Использование уравнений Аппеля при исследовании манипуляционных систем роботов / Труды шестой сессии международной научной школы «Фундаментальные и прикладные проблемы теории точности процессов, машин, приборов и систем. Ч. 2/ под ред. В.М. Мусалимова – СПб: ИПМаш РАН, 2003.
35. Попов, Е.П. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы / Е.П. Попов, А.Ф. Верещагин, С.Л. Зенкевич. –М.: Наука, 1978. –398 с.
36. Фу, К. Робототехника/ К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли.– М.: Мир, 1989.– 624 с.
37. Галиуллин, А.С. Обратные задачи динамики. / А.С. Галиуллин. –М.: Наука, 1981. –143 с.
38. Михайлов, С.А. Динамика упругого манипулятора при заданных управляющих моментах или движениях перемещаемого груза / С.А. Михайлов, Ф.Л. Черноусько // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. –1984. – №2. –С. 51–58.
39. Крутько, П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем и оптимальные процессы / П.Д. Крутько, Е.Н. Попов // Докл. АН СССР. –1982. –Т. 263. – №5.
40. Крутько, П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.
41. Петров, Б.А. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики / Б.А. Петров, П.Д. Крутько, Е.П. Попов // Докл. АН СССР, 1979. – Т.247. –№5. – С. 1078–1081.
42. Черноусько, Ф.Л. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, В.Г. Градецкий. – М.: Наука. 1989. – 368 с.
43. Игнатъев, М.Б. Алгоритмы управления роботами-манипуляторами / М.Б. Игнатъев, Ф.М. Кулаков, А.М. Покровский. –Л.: Машиностроение, 1972.– 247 с.
44. Тимофеев, А.В. Управление роботами / А.В. Тимофеев. –Л.: Машиностроение, 1986. –240 с.
45. Тимофеев, А.В. Адаптивные робототехнические комплексы / А.В. Тимофеев. – Л.: Машиностроение, 1988. –332 с.

46. Юревич, Е.И. Управление роботами и робототехническими системами / Е.И. Юревич. – СПб.: СПбГТУ, 2000. –171 с.
47. Подураев, Ю.В. Мехатроника: основы, методы, применение / Ю.В. Подураев. – М.: Машиностроение, 2009. –256 с.
48. Пупков, К.А. Методы робастного, нейро-нечёткого и адаптивного управления / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов, А.И. Гаврилов и др. – М.: МГТУ и Н. Э. Баумана, 2002. –744 с.
49. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. –303 с.
50. Ющенко, А.С. Применение нечёткой логики в организации интерфейса человек-коллаборативный робот. В сборнике: Нечеткие системы, мягкие вычисления и интеллектуальные технологии (НСМВИТ-2017) труды VII всероссийской научной-практической конференции / А.С. Ющенко. – 2017. – С. 181–190.
51. Ермишин, К.В. Коллаборативные мобильные роботы – новый этап развития сервисной робототехники / К.В. Ермишин, А.С. Ющенко // Робототехника и техническая кибернетика.– СПб.: ЦНИИ РТК. – 2016. – №3(12). – С. 3–9.
52. Ott, C. Prioritized Multi-Task Compliance Control of Redundant Manipulators / C. Ott, A. Dietrich, A. Albu-Schäffer // Automatica. – 2015. –vol 5 – pp. 416–423.
53. Ott, C. Cartesian Impedance Control of Redundant and Flexible-Joint Robots, ser. Springer Tracts in Advanced Robotics / C. Ott. – Berlin: Springer-Verlag, 2008.
54. Vanderborght, B. Variable impedance actuators: A review / B. Vanderborght, A. Albu-Schäffer, A. Bicchi, E. Burdet, D. G. Caldwell, R. Carloni, et al. // Robotics and Autonomous Systems, 2013. – vol. 61. – no. 12. – pp. 1601–1614.
55. Глазков, В.Н. Точностные оценки нейросетевого решения обратной задачи кинематики манипулятора / В.Н. Глазков, Н.В. Егоров, С.В. Пчелинцева // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – №11. –С. 2–18.
56. Лохин, В.М. Развитие технологии применения аппарата теории автоматов для управления многоагентными робототехническими системами / В.М. Лохин, С.В. Манько, М.П. Романов // Робототехника и техническая кибернетика.– СПб.: ЦНИИ РТК. – 2016. – №2(11). – С. 3–7.

57. Ермолов И.Л. Формирование обобщенной структурной схемы робототехнических комплексов / Л.И. Ермолов, С.П. Хрипунов // Робототехника и техническая кибернетика. – СПб.: ЦНИИ РТК. – 2017. – №1(14). – С. 22–26.

58. Даляев, И.Ю. Перспектива создания роботизированных спутников для технического обслуживания и продления сроков активного существования космических аппаратов / И.Ю. Даляев, Е.М. Кузнецов, И.В. Шардыко // Робототехника и техническая кибернетика.– СПб.: ЦНИИ РТК. – 2015. – №3(8). – С. 27–31.

59. Nanos, K. On the use of free-floating spacerobots in the presence of angular momentum / K. Nanos, E. Papadopoulos // Intelligent Service Robotics, 2011. – vol. 4, – no. 1, pp. 3-15.

60. Lampariello, R. Generating feasible trajectories for autonomous on-orbit grasping of spinning debris in a useful time / R. Lampariello, G. Hirzinger // Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference. – pp. 5652–5659.

61. De Stefano, M. An Energy-Based Approach for Multi-Rate Control of a Manipulator on an Actuated Base / M. De Stefano, R. Balachandran, A.M. Giordano, C. Ott and C. Secchi // IEEE Int. Conf. Robot Autom. – May 2018. <https://www.researchgate.net> (02.11.2018)

62. Алисейчик, А.П. Механика и управление экзоскелетами нижних конечностей для нейрореабилитации спинальных больных / А.П. Алисейчик, И.А. Орлов, В.Е. Павловский, В.В. Павловский, А.К. Платонов // Сборник докладов: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики . –2015. –С. 132–134.

63. Яцун, С.Ф. Экзоскелеты: анализ конструкций, классификации, принципы создания, основы моделирования. Монография. / С.Ф. Яцун, В.Е. Павловский, Б.В. Лушников, О.В. Емельянова, А.С. Яцун, С.И. Савин, А.В. Варочаев // Курск: Университетская книга, 2014. –149 с.

64. Яцун, С.Ф. Алгоритмы выбора походки для экзоскелета нижних конечностей в режиме движения по лестнице / С.Ф. Яцун, С.И. Савин, А.С. Яцун //

Сборник IV Международной Школы-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин – School-NDM 2017». –2017. –С. 468–476.

65. Яцун, С.Ф. Опыт проектирования реабилитационных экзоскелетов / С.Ф. Яцун, А.С. Яцун, Н.А. Корневский // Медицинская техника. –2017. –№ 3 (303). –С. 48–51.

66. Савин, С.И. Эффективный алгоритм управления вертикализацией экзоскелета / С.И. Савин, А.С. Яцун, С.Ф. Яцун // Проблемы машиностроения и надежности машин. –2017. –№ 5. –С. 108–113.

67. Корневский, Н.А. Экзоскелет с биотехнической обратной связью для вертикализации пациентов / Н.А. Корневский, С.Ф. Яцун, А.С. Яцун, В.В. Дмитриева // Медицинская техника. –2017. –№ 4 (304). –С. 42–45.

68. Jatsun, S.F. Experience in the Development of Rehabilitation Exoskeletons / S.F. Jatsun, A.S. Jatsun, N.A. Korenevskiy // Biomedical Engineering. –2017. –vol. 51. –no 3. –pp. 218–222.

69. Savin, S.I. Energy-efficient Algorithm of Control of Exoskeleton Verticalization / S.I. Savin, A.S. Yatsun, S.F. Yatsun // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. –2017. –vol. 46. –no 5. –pp. 512–517.

70. Базилян, Э.А. Лазерная роботизированная медицинская установка / Э.А. Базилян, А.А. Чунихин, О.О. Янушевич, Ю.В. Подураев, М.А. Буйнов, Д.Д. Климов, А.А. Воротников // патент на полезную модель RUS 172817 27.04.2017.

71. Подураев, Ю.В. Подход и опыт проектирования медицинской коллаборативной робототехники для лазерной хирургии и биопринтенга / Ю.В. Подураев // Мехатроника, автоматизация, управление. –2017. –Т. 18. –№ 11. –С. 749–752.

72. Vorotnikov, A.A. Criterial for comparison of robot movement trajectories and manual movement of a doctor for performing maxillofacial surgeries / A.A. Vorotnikov, D.D. Klimov, E.A. Melnichenko, Yu.V. Poduraev, E.A. Bazikyan // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. –2018. –vol. 7. –no 4. –pp. 361–366.

73. Vorotnikov A. Uncertainty estimation of axes direction determination of industrial robot using an ellipsoid concentration model / A. Vorotnikov, E. Romash, A.

Isaev, O. Bashevskaya, G. Bianchi, Y. Poduraev // Annals of DAAAM and Proceedings of the International DAAAM Symposium 27. –2016. – pp. 480–486.

74. Подураев, Ю.В. Разработка программного обеспечения для моделирования кинематики многозвенного манипулятора / Ю.В. Подураев, О.Д. Егоров, Л.С. Прохоренко // Автоматизация и управление в машиностроении. –2016. –№ 2 (24). –С. 5–9.

75. Климов, Д.Д. Синтез структуры робототехнического комплекса высокоскоростной съемки динамических объектов / Д.Д. Климов, Ю.В. Подураев // Мехатроника, автоматизация, управление. –2016. –Т.17. –№5. –С. 316–319.

76. Klimov, D. Robotic flight follower system for high speed recording / D. Klimov, Y. Poduraev // Annals of DAAAM and Proceedings of the International DAAAM Symposium Proceedings of the 26th DAAAM International Symposium. – 2015. –pp. 720–726.

77. Дружинина, О.В. Условия оптимальной стабилизации программного движения манипуляционной системы / О.В. Дружинина // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. –2013. –№ 15. –С.47–57.

78. Дружинина, О.В. Разработка подходов к решению задач управления движением технических систем, моделируемых дифференциальными включениями / О.В. Дружинина, О.Н. Масина, А.А. Петров // Информационно-измерительные и управляющие системы. –2017. –Т. 15. –№ 4. –С. 64–72.

79. Петров, А.А. Поиск оптимальных параметров движения для нелинейных динамических систем с многозначностью / А.А. Петров, О.В. Дружинина, О.Н. Масина // Материалы IV Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования». –Елец: ЕГУ. –2018. –С. 78–85.

80. Дружинина, О.В. Анализ обобщенной технической устойчивости транспортных систем / О.В. Дружинина, О.Н. Масина // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. –2014. –№ 16. –С. 84–98.

81. Бусленко, Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М.: Наука. – 1978. – 400 с.

82. Бурбаки, Н. Теория множеств / Н. Бурбаки. – М.: Мир. –1965. –456 с.
83. Павловский, Ю.Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании / Ю.Н. Павловский // Математическое моделирование. –1991. – Т. 3. – № 6. – С. 93–122.
84. Павловский, Ю.Н. Геометрическая теория декомпозиции и некоторые ее приложения / Ю.Н. Павловский. – М.: ВЦ РАН. – 2011. – 93 с.
85. Павловский, Ю.Н. О языковой среде геометрической теории декомпозиции / Ю.Н. Павловский // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. –2014. –Т. 29. –№ 1 (29). –С. 3–36.
86. Павловский, Ю.Н. О естественных канонических морфизмах / Ю.Н. Павловский // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. –2016. –Т. 31. –№ 1 (31). –С. 5–23.
87. Бродский, Ю.И. Распределенное имитационное моделирование сложных систем / Ю.И. Бродский. –М.: ВЦ РАН. –2010. –155 с.
88. Бродский, Ю.И. Методы декомпозиции в программировании имитационных моделей сложных систем / Ю.И. Бродский // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. –2012. –Т. 27. –№ 1 (27). – С. 54–79.
89. Бродский, Ю.И. Модельный синтез и модельно-ориентированное программирование / Ю.И. Бродский. –М.: ВЦ РАН. –2013. –142 с.
90. Бродский, Ю.И. О модельном синтезе и модельно-ориентированном программировании / Ю.И. Бродский // Научное обозрение. –2014. –№ 12. –С. 151–157.
91. Brodsky, Yu.I. Model synthesis and model-oriented programming – the technology of design and implementation of simulation models of complex multicomponent systems / Yu.I. Brodsky // In the World of Scientific Discoveries, Series B. –2014. –vol. 2. –no 1. –pp. 12–31.
92. Бродский, Ю.И. Роды структур Н. Бурбаки в задаче синтеза имитационных моделей сложных систем и модельно-ориентированное программирование /

Ю.И. Бродский // Журнал вычислительной математики и математической физики. –2015. –Т. 55. –№ 1. –С. 153–164.

93. Бродский, Ю.И. Проблема описания и синтеза распределенных имитационных моделей сложных многокомпонентных систем / Ю.И. Бродский // Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий. –2015. –Т. 1. –С. 151–153.

94. Бродский, Ю.И. Сквозной метод описания, синтеза и реализации имитационных моделей сложных многокомпонентных систем / Ю.И. Бродский // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. –2015. –Т. 30. –№ 1 (30). –С. 87–102.

95. Бродский, Ю.И. Модельно-ориентированное программирование – технология распределённых и высокопроизводительных вычислений / Ю.И. Бродский // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Высокопроизводительные вычисления на графических процессорах». –Пермь: ПГНИУ. –2016. –С. 3–8.

96. Карпенко, А.П. Гибридные популяционные алгоритмы параметрической оптимизации проектных решений / А.П. Карпенко // Информационные технологии. –2013. – №S12. –С. 6–15.

97. Карпенко, А.П. Параллельные популяционные алгоритмы одно- и многоцелевой оптимизации // А.П. Карпенко // Труды Международной суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров». – Российская академия наук Суперкомпьютерный консорциум университетов России. –2014. –С. 240–244.

98. Карпенко, А.П. Эффективность гибридизации популяционных алгоритмов глобальной оптимизации / А.П. Карпенко // Материалы III Всероссийской Поспеловской конференции с международным участием «Гибридные и синергетические интеллектуальные системы». – Светлогорск: БФУ им. И. Канта. –2016. –С. 324–331.

99. Карпенко, А.П. Метод оценки характеристических показателей целевой функции в задаче оптимизации / А.П. Карпенко // Системы компьютерной математики и их приложения. –2017. –№ 18. –С. 57–59.
100. Карпенко, А.П. Эволюционные операторы популяционных алгоритмов глобальной оптимизации. Опыт систематизации / А.П. Карпенко // Математика и математическое моделирование. –2018. –№ 1. –С. 59–89.
101. Юревич, Е.И. Основы робототехники / Е.И. Юревич. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. –359 с.
102. Юревич, Е.И. Вклад ЦНИИ РТК в космонавтику / Е.И. Юревич // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. –2011. –№ 3 (130). –С. 9–12.
103. Даляев, И.Ю. Реконфигурируемые космические робототехнические системы / И.Ю. Даляев, Е.И. Юревич // Робототехника и техническая кибернетика. – СПб.: ЦНИИ РТК. –2016. –№ 2 (11). –С. 70–73.
104. Shahinpoor, M. A Robot Engineering Textbook / M. Shahinpoor. –New York: Happer&Row Publishers, 1990. – 573 p.
105. Fu, K.S. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence / K.S. Fu, R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee. – New York: Hill Book Company, 1989. – 594 p.
106. Lewis, F.L. Robot Manipulator Control: Theory and Practice / F.L. Lewis, D.M. Dawson, C.T. Abdallah // CRC Press, 2003. –638 p.
107. Kurfess, T.R. Robotics and Automation Handbook / T.R. Kurfess // CRC Press, 2004. –608 p.
108. Fishwick, P.A. Handbook of Dynamic System Modeling / P.A. Fishwick // CRC Press, 2007. –760 p.
109. Featherstone R. Robot dynamics / R. Featherstone // Scholarpedia. –vol. 2. – no 10. – 2007. p. 3829. URL: <http://dx.doi.org/10.4249/scholarpedia.3829> (дата обращения: 05.11.2018).
110. Gu, E.Y.L. A Journey from Robot to Digital Human / E.Y.L. Gu // Springer-Verlag, 2013. –577 p.

111. Zhao, J. *Advanced Theory of Constraint and Motion Analysis for Robot Mechanisms* / J. Zhao, Z. Feng, F. Chu, N. Ma // Elsevier Ltd., 2014.–480 p.
112. Nicolescu, G. *Model-Based Design for Embedded Systems* / G. Nicolescu, P. J. Mosterman // CRC Press, 2017. –766 p.
113. Zander, J. *Model-Based Testing for Embedded Systems* / J. Zander, I. Schieferdecker, P. J. Mosterman // CRC Press, 2017. –688 p.
114. Yamaguchi, T. *Advances in High-Performance Motion Control of Mechatronic Systems*/ T. Yamaguchi, M. Hirata, C.K. Pang // CRC Press, 2017. –337 p.
115. Klee, H. *Simulation of Dynamic Systems with MATLAB® and Simulink®, Third Edition* / H. Klee, R. Allen // CRC Press, 2017. –832 p.
116. Shapira, Y. *Mathematical Objects in C++: Computational Tools in A Unified Object-Oriented Approach* / Y. Shapira // CRC Press, 2017. –609 p.
117. Лафоре, Р. *Объектно-ориентированное программирование в C++. Классика Computer Science* / Р. Лафоре. – СПб.: ПИТЕР, 2018. – 928 с.
118. MATLAB и Simulink. Центр компетенций компании Mathworks [Электронный ресурс]. URL: <https://matlab.ru/> (Дата обращения: 05.11.2018).
119. Открытый исходный код Моделика [Электронный ресурс]. URL: <https://www.openmodelica.org> (Дата обращения: 05.11.2018).
120. Среда динамического моделирования SimInTech [Электронный ресурс]. URL: <http://simintech.ru> (Дата обращения: 05.11.2018).
121. Универсальный механизм – программный комплекс для моделирования [Электронный ресурс]. URL: <http://www.umlabor.ru/> (Дата обращения: 05.11.2018).
122. Nutaro, J.J. *Building Software for Simulation: Theory and Algorithms, with Applications in C++* / J.J. Nutaro // Wiley, 2011. – 372 p.
123. Косенко, И.И. Применение объектно-ориентированной парадигмы для построения модели динамики систем тел / Нелинейная динамика: Сб. научн. тр. III Международной Школы-конференции молодых ученых // М.: ИМАШ РАН, 2016. –С. 176–188.
124. Крахмалев, О.Н. Моделирование движения промышленных роботов в программном комплексе «Универсальный механизм» на основе 3D-моделей /

О.Н. Крахмалев, Д.И. Петрешин // Вестник Брянского государственного технического университета. –2014. –№ 4 (44). –С. 52–57.

125. Чирков, В.В. Разработка имитационной модели промышленного робота ТУР-10К с использованием программного комплекса «Универсальный механизм» / В.В. Чирков, А.С. Шевцов // International Journal of Advanced Studies. –vol. 7. – no 3. – 2017. – pp. 46–63.

126. Инженерное математическое программное обеспечение PTC Mathcad [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ptc.com/en/products/mathcad> (Дата обращения: 05.11.2018).

127. Ассоциация Modelica [Электронный ресурс]. URL: <https://modelica.org> (Дата обращения: 05.11.2018).

128. Dymola – Dynamic Modeling Laboratory User’s Manual.– Dynasim AB, Lund, Sweden, 2008.

129. Elmqvist, H. A Structured Model Language for Large Continuous Systems. PhD Thesis. – Lund University, Sweden. – May, 1978.

130. Elmqvist, H. Object-oriented modeling of hybrid systems / H. Elmqvist, F.E. Cellier, and M. Otter // Proc. European Simulation Symposium. – Delft, The Netherlands, 1993.

131. Elmqvist, H. Methods for Tearing Systems of Equations in Object-Oriented Modeling / H. Elmqvist, and M. Otter // Proc. ESM’94, European Simulation Multiconference. – Barcelona, Spain, 1994.

132. Cellier, F.E. Automated formula manipulation supports object-oriented continuous-system modeling /F.E. Cellier, and H. Elmqvist //. – IEEE Control Systems. – no 13(2). –1993.– pp. 28–38.

133. Elmqvist, H. Fundamentals of Synchronous Control in Modelica / H. Elmqvist, M. Otter, and S.E. Mattsson // Proceedings of 9th International Modelica Conference. – Munich, Germany. – September 3–5, 2012.

134. Elmqvist, H. Parallel Model Execution on Many Cores / H. Elmqvist, and S.E. Mattsson // Proceedings of 10th International Modelica Conference. – Lund, Sweden. – March 10–12, 2014.

135. Elmqvist, H. Modelica extensions for Multi-Mode DAE Systems / H. Elmqvist, M. Otter, and S.E. Mattsson // Proceedings of 10th International Modelica Conference. – Lund, Sweden. – March 10–12, 2014.

136. Otter, M. Hybrid modeling in Modelica based on the synchronous data flow principle / M. Otter, H. Elmqvist, S.E. Mattsson // IEEE Symposium on Computer-Aided Control System Design, CACSD'99. –Hawaii, USA. –August, 1999.

137. Колесов, Ю.Б. Объектно-ориентированное моделирование сложных динамических систем. – СПб.: Изд-во СПбГПУ. – 2004. –240 с.

138. Колесов, Ю.Б. Объектно-ориентированное моделирование в среде Rand Model Designer / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков // Сборник трудов научного форума с международным участием «Неделя науки СПбПУ», Санкт-Петербург. – 2015. –С. 18–25.

139. Колесов, Ю.Б. Вычислительные эксперименты в пакете RMD / Ю.Б. Колесов // Компьютерные инструменты в образовании. –№5. –2012. –С. 11–24.

140. Колесов, Ю.Б. Гибридные системы. Сравнительный анализ языков моделирования Modelica и Model Vision Language / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков // Университетский научный журнал. –2014. –№8. –С. 102–111.

141. Сениченков, Ю.Б. Использование визуальной среды Rand Model Designer для разработки промышленных приложений / Ю.Б. Сениченков, Ю.Б. Колесов // Университетский научный журнал. –2014. –№8. –С. 112–123.

142. Белоусов, И.Р. Применение метода символьных преобразований для формирования алгоритмов параллельных вычислений в задачах кинематики и динамики роботов / И.Р. Белоусов // Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 5-19-93. –1993. –25 с.

143. Второв, В.Б. Моделирование динамики робота-манипулятора на параллельных вычислительных структурах / В.Б. Второв, Д.Ю. Иншаков // СПб: Известия ТЭТУ. –1997. –№ 513. – С. 65–70.

144. Внуков, А.А. Разработка методики разбиения связанных между собой подзадач для параллельного выполнения кинематических преобразований мани-

пулятора / А.А. Внуков, А.С. Зазулина // Вестник РУДН, серия Инженерные исследования. –2009. –№4. –С. 73–85.

145. Внуков, А.А. Параллельный алгоритм обработки данных на примере решения основных задач динамики роботов-манипуляторов / А.А. Внуков, М.А. Лисенков // Доклады пятой международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления», Москва. – 2010. –С. 1025–1036.

146. Гергель, В.П. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем: учебное пособие / В.П. Гергель, Р.Г. Стронгин // Н. Новгород: ННГУ, 2003. –184 с.

147. Каляев, И.А. Развитие отечественных многокристальных реконфигурируемых вычислительных систем: от воздушного к жидкостному охлаждению / И.А. Каляев, А.И. Дордопуло, И.И. Левин, А.М. Федоров // Труды СПИИРАН. – 2017. –№ 1 (50). –С. 5–31.

148. Kalyaev, I.A. Reconfigurable multipipeline computing structures / I.A. Kalyaev, I.I. Levin, E.A. Semernikov, V.I. Shmoilov // New York: Nova Science Publishers, 2012. –330 p.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015661029

**Геометрическая модель манипуляционных систем
промышленных роботов и многокоординатных станков**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Брянский государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *Крахмалев Олег Николаевич (RU), Петрешин Дмитрий Иванович (RU), Федонин Олег Николаевич (RU)*

Заявка № 2015618281

Дата поступления 01 сентября 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 15 октября 2015 г.

Заместитель руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Курий



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016617509

Вычисление кинематических параметров манипуляционных систем промышленных роботов и многокоординатных станков

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Брянский государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *Крахмалев Олег Николаевич (RU), Петрешин Дмитрий Иванович (RU), Федонин Олег Николаевич (RU)*

Заявка № 2016614871

Дата поступления 10 мая 2016 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 06 июля 2016 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев





МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЕМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
ОБРАЗОВАНИЯ
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"
(основан в 1991 году)

**СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ
ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА**

№ 20898



Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий
требованиям новизны и приоритетности:

**Метод построения геометрических моделей
манипуляционных систем промышленных роботов и
многокоординатных станков**

Дата регистрации: 07 мая 2015 года

Авторы: Крахмалев О.Н., Петрешин Д.И., Федонин О.Н.

Организация-разработчик: ФГБОУ ВПО «Брянский государственный
технический университет»



Директор ФГБНУ ИУО РАО,
д.экон.н., профессор  С.С. Неустроев

Руководитель ОФЭРНО, почетный
работник науки и техники России  А.И. Галкина



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЕМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
ОБРАЗОВАНИЯ
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"
(основан в 1991 году)

**СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ
ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА**

№ 20899 

Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий требованиям новизны и приоритетности:

Методика параметризации геометрических (математических) моделей манипуляционных систем промышленных роботов и многокоординатных станков

Дата регистрации: 07 мая 2015 года

Авторы: Крахмалев О.Н., Петрешин Д.И., Федонин О.Н.

Организация-разработчик: ФГБОУ ВПО «Брянский государственный технический университет»

Директор ФГБНУ ИУО РАО,
д.экон.н., профессор  С.С. Неустроев

Руководитель ОФЭРНиО, почетный
работник науки и техники России  А.И. Галкина





МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
 федеральное государственное бюджетное научное учреждение
 ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЕМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
 ОБРАЗОВАНИЯ
 ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"
 (основан в 1991 году)

**СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ
 ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА**

№ 20900



Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий
 требованиям новизны и приоритетности:

**Метод коррекции интегральных отклонений движения
 исполнительных механизмов промышленных роботов и
 многокоординатных станков**

Дата регистрации: 07 мая 2015 года
 Авторы: Крахмалев О.Н., Петрешин Д.И., Федонин О.Н.
 Организация-разработчик: ФГБОУ ВПО «Брянский государственный
 технический университет»

Директор ФГБНУ ИУО РАО,
 д.экон.н., профессор  С.С. Неустроев

Руководитель ОФЭРНиО, почетный
 работник науки и техники России  А.И. Галкина





СЕРТИФИКАТ

Выдан Крахмалеву О.Н. и свидетельствует о том, что издание:

«Моделирование манипуляционных систем роботов: учебное пособие»

опубликовано в Электронно-библиотечной системе IPRbooks (www.iprbookshop.ru), являющейся электронным СМИ (свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС 77-43102 от 20 декабря 2010 г.).

Изданию присвоен ISBN 978-5-4486-0146-0.

Выходные сведения издания: Крахмалев О.Н. Моделирование манипуляционных систем роботов [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. Н. Крахмалев — Электрон. дан. и прогр. (8 Мб). — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 165 с. — 978-5-4486-0146-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/73333.html>

Директор

ООО «Ай Пи Эр Медиа»



(Иванова Н.Ю.)





РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
БРЯНСКАЯ ОБЛАСТЬ

БЛАГОДАРСТВЕННОЕ ПИСЬМО ГУБЕРНАТОРА БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ

Доценту кафедры «Автоматизированные технологические системы», кандидату технических наук ФГБОУ ВПО «Брянский государственный технический университет»

О.Н. КРАХМАЛЕВУ

Уважаемый Олег Николаевич!

Благодарю Вас за значительный вклад в развитие научных исследований, подготовку и воспитание инженерных кадров для предприятий Брянской области и в связи с Днем российской науки.

Желаю крепкого здоровья, успехов в работе, оптимизма и благополучия.

Временно исполняющий
обязанности Губернатора



А.В. Богомаз





БЛАГОДАРСТВЕННОЕ ПИСЬМО

Уважаемый(ая)

Крахмалев Олег Николаевич

представитель образовательной организации

Брянский государственный технический университет

*Команда проекта «Профстажировки 2.0» благодарит Вас
за подготовку участника V сезона Всероссийского конкурса
студенческих работ «Профстажировки 2.0»
и успешное выполнение кейса*

**Разработка ПО для реализации численного метода решения обратной
задачи кинематики 3-DoF промышленного робота и верификация этого ПО
на основе результатов компьютерного моделирования с использованием
3D-моделей роботов**

организации-работодателя

Русская Броня

Февраль 2022 г.

**РОССИЯ –
СТРАНА
ВОЗМОЖНОСТЕЙ**





БЛАГОДАРСТВЕННОЕ ПИСЬМО

Уважаемый(ая)

Крахмалев Олег Николаевич

представитель образовательной организации

Брянский государственный технический университет

*Команда проекта «Профстажировки 2.0» благодарит Вас
за подготовку участника V сезона Всероссийского конкурса
студенческих работ «Профстажировки 2.0»
и успешное выполнение кейса*

**Разработка ПО для реализации численного метода решения обратной
задачи кинематики 6-DoF промышленного робота и верификация этого ПО
на основе результатов компьютерного моделирования с использованием
3D-моделей роботов**

организации-работодателя

Русская Броня

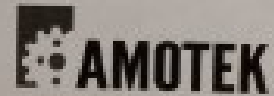
Февраль 2022 г.

**РОССИЯ –
СТРАНА
ВОЗМОЖНОСТЕЙ**



исх. № 1610
от 16.10.2021

ООО ТД «Русская Броня»



Доценту Департамента анализа данных
и машинного обучения Финансового
университета при Правительстве
Российской Федерации О.Н.
Крахмалеву

Олег Николаевич, рассмотрев ваше обращение по вопросу перспективы использования разрабатываемых вами решений в области робототехники, в развитии нашей компании по данному направлению, мы такую перспективу видим. Обозначенные вами подходы к кинематическому и динамическому анализу манипуляционных систем антропоморфных роботов, базирующиеся на основе объектного моделирования, бесспорно, заслуживают внимания и дальнейших исследований. Разработка программного обеспечения, для реализации объектного моделирования манипуляционных систем антропоморфных роботов является актуальной задачей, а перспектива использования объектных моделей для управления антропоморфными роботами с изменяющейся кинематической структурой содержит в себе очевидные конкурентные преимущества. Со своей стороны, подтверждаем интерес к тематике ваших исследований. Наша компания ТМ AMOTEK располагает собственным конструкторским бюро и мощным производственным комплексом, научно-исследовательской лабораторией робототехники. Основное направление деятельности компании автоматизация и роботизация предприятий пищевой промышленности, комплексное оснащение производств. Компания является сертифицированным интегратором робототехники (OMRON, Fanuc).

Руководитель проектов ООО «ТД Русская броня»  И. В. Устинов

Адрес | 241017, г. Брянск, ул. Возвальная, 128
Телефон | 8 800 511 0099
+7 (4832) 77 33 73

e-mail | info@amotek-rb.com
www | amotek-rb.com